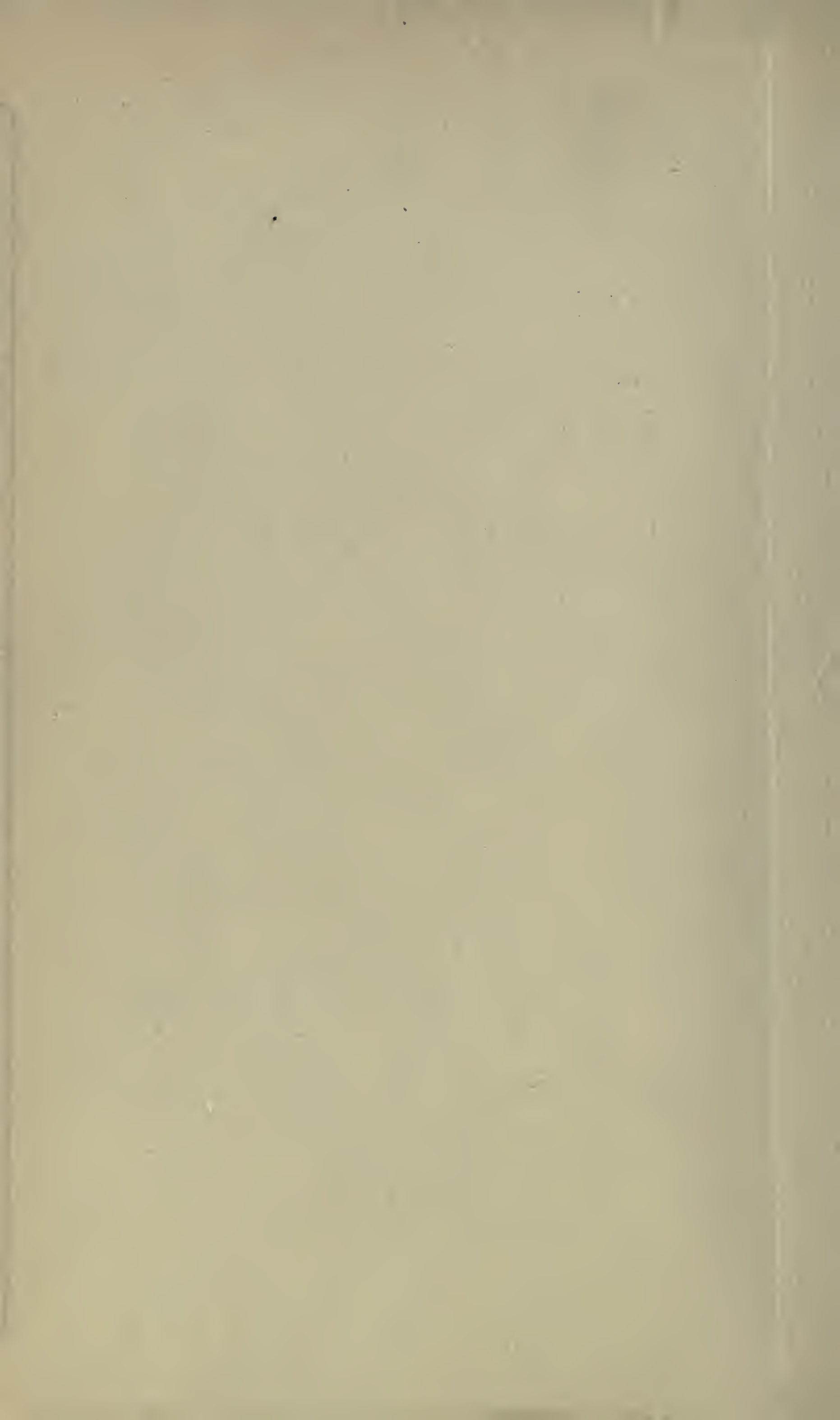
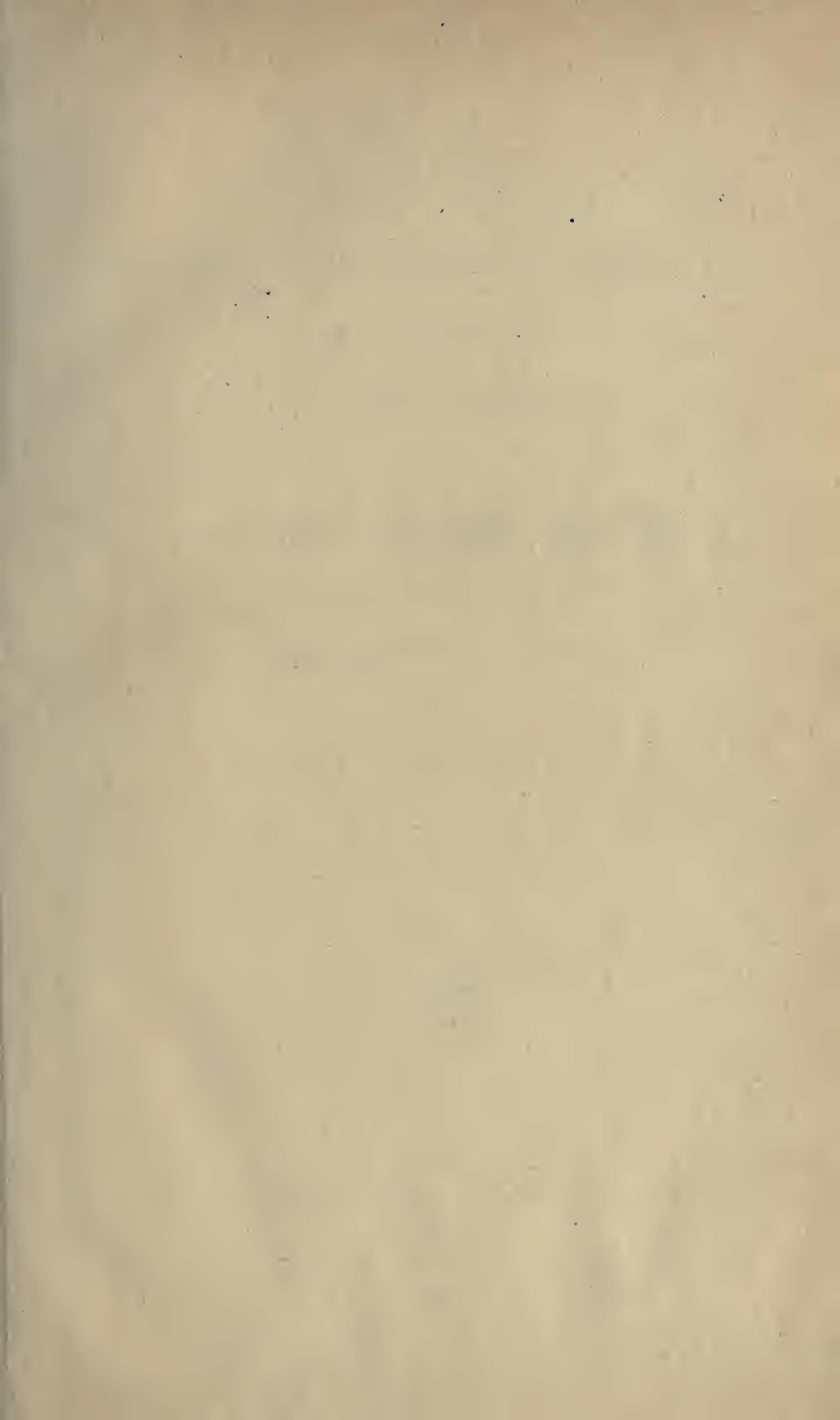
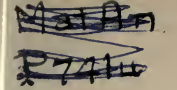

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01213504 2









ÜBER DIE

PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNG

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

UND DEREN AUFTRETEN

IN DER

MATHEMATISCHEN PHYSIK.

VON

FRIEDRICH POCKELS.

MIT EINEM VORWORT VON FELIX KLEIN.

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1891.

Vorwort.

Neben der partiellen Differentialgleichung des Potentials, $\Delta u = 0$, ist es vor allen Dingen die Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, welche in der mathematischen Physik von Alters her und neuerdings auch bei rein mathematischen Betrachtungen eine hervorragende Rolle spielt. Aber unsere Lehrbücher geben über die wichtigen Resultate, welche betreffs dieser Gleichung gefunden sind, wie insbesondere auch über die interessanten Probleme, welche an dieselbe anknüpfen, nur mangelhafte Auskunft. Ich habe daher Herrn Dr. *Pockels*, den ich als besonders sorgfältigen Arbeiter kannte, veranlasst, über den gegenwärtigen Stand unserer bezüglichen Kenntnisse ein zusammenhängendes Referat auszuarbeiten. Ich nahm hieran um so mehr Antheil, als dadurch die Möglichkeit gegeben war, eine Reihe weitergehender Ideen, welche ich in meinen mathematisch-physikalischen Vorlesungen der letzten Semester berührt hatte und deren Ausgestaltung ich kaum selbst übernehmen kann, an ihrem Platze zur Sprache zu bringen. Dass auch Herr Dr. *Pockels* selbst in seine Darstellung verschiedentlich neue Entwickelungen eingeschaltet hat, wird der Kundige leicht erkennen. Möge die kleine Schrift, welche wir hiermit dem Publikum übergeben, in ihrer anspruchslosen Form manchem Mathematiker und mathematischen Physiker willkommen sein!

Göttingen, 2. September 1890.

F. Klein.

Inhalt.

II. Theil. Von den ausgezeichneten Lösungen.

A. Allgemeine Theorie der ausgezeichneten Lösungen.

Verzeichniss einiger Berichtigungen.

S. 29, Zeile 1 von oben, lies $F'(x' + iy')F_1'(x' - iy')$ statt $F(x' + iy')F_1(x' - iy')$.

S. 60, „ 1 „ „ ist hinter „positiv" einzuschalten: „oder gleich Null".

S. 71, „ 18 „ „ lies „Satz 5)" statt „Satz 6)".

S. 265, „ 7 von unten ist hinter „wurde" einzuschalten: „und ausserdem muss in den beiden letztgenannten Fällen der Factor *f constant* sein".

Einleitung.

Die partielle Differentialgleichung des Potentials, $\Delta V = 0$, ist wegen ihrer grossen Wichtigkeit für die verschiedensten Gebiete der Physik einerseits und wegen ihrer Bedeutung für die Functionentheorie andererseits in diesem Jahrhundert der Gegenstand ausserordentlich zahlreicher mathematischer Untersuchungen gewesen, und es fehlt auch nicht mehr an zusammenhängenden Darstellungen der Theorie ihrer Lösungen, wie solche mehr oder weniger vollständig in den Vorlesungen und den Werken von *Dirichlet*, *C. Neumann*, *F. Neumann*, *Harnack*, *Clausius*, *Betti*, *Mathieu* enthalten sind; auch eine ziemlich vollständige historische Uebersicht der auf dieses Gebiet bezüglichen Arbeiten ist von *Bacharach**) geliefert worden. Es wäre nun gewiss wünschenswerth, in ähnlicher Weise nach der mathematischen Seite ausgebildete Theorieen für andere in der mathematischen Physik vorkommende partielle Differentialgleichungen zu besitzen. Unter den letzteren kommt in erster Linie die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

in Betracht, sowohl wegen ihrer hervorragenden Wichtigkeit für zahlreiche physikalische Probleme, als auch weil sie als die nächste Verallgemeinerung der Potentialgleichung angesehen werden kann. Mit dieser Differentialgleichung haben sich in den letzten drei Jahrzehnten zahlreiche Mathematiker und Physiker beschäftigt; allein es existirt noch keine zusammenfassende Darstellung der in diesen Arbeiten zerstreuten Resultate. Daher habe ich auf Anregung und unter Anleitung von Herrn Prof. *F. Klein* versucht, im Folgenden

*) Bacharach: Geschichte der Potentialtheorie. Göttingen, Vandenhoeck u. Ruprecht. 1883.

eine solche Uebersicht zu geben, verbunden mit der Andeutung neuer Gesichtspunkte für die weitere Ausbildung der Theorie. Diese neuen Ideen wurden grösstentheils von Herrn Prof. *Klein* in seinen in den Jahren 1888—90 zu Göttingen gehaltenen Vorlesungen über „Potentialtheorie", „partielle Differentialgleichungen der Physik" und „Lamé'sche Functionen" ausgesprochen (an den betreffenden Stellen der vorliegenden Schrift ist diese Quelle durch ein in Klammer gesetztes K angedeutet).

Es sollen nun im Folgenden ausser der Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{1}$$

worin Δ den zweiten Differentialparameter und k eine Constante bezeichnet, welche, wo nichts Besonderes darüber gesagt wird, sowohl *reell* als auch *rein imaginär* sein kann, auch noch solche lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Bereich der Untersuchung gezogen werden, welche eine analoge physikalische Bedeutung haben, wie die obige, und sich von derselben nur dadurch unterscheiden, dass an Stelle von Δu ein allgemeinerer, im Theil I näher angegebener Differentialausdruck steht, und dass k^2 noch mit einer willkürlichen Function der unabhängigen Variabeln multiplicirt ist. Die Anzahl der unabhängigen Variabeln soll auf höchstens *drei* beschränkt werden, so dass u als Function der Coordinaten in einem Raumgebiete von 1, 2 oder 3 Dimensionen betrachtet werden kann. Stellenweise werden die Untersuchungen nur für zweidimensionale Gebiete vollständig durchgeführt werden, einmal weil die Verallgemeinerung für den Fall von drei Dimensionen meistens ohne Weiteres zu übersehen ist, sodann auch, weil der Fall von zwei Dimensionen in mancher Hinsicht besonderes Interesse darbietet.

Für die Sätze, welche bisher über die Lösungen der erwähnten Differentialgleichungen aufgestellt worden sind, fehlen in den meisten Fällen noch die mathematischen Beweise, und sie können nur durch physikalische Gründe plausibel gemacht werden. Dementsprechend soll in der folgenden Entwicklung überhaupt *immer die physikalische Erfahrung als*

leitender Gesichtspunkt gelten, welcher zur Aufstellung von Sätzen führt, für die natürlich später noch die Beweise zu erbringen sein werden. Dieser Gedankengang ist auch in *Rayleigh's* „Theory of Sound" innegehalten, einem Werke, welches das reichhaltigste Material zur Theorie der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ enthält und demgemäss bei der vorliegenden Darstellung auch in erster Linie benutzt worden ist*).

Die physikalischen Probleme, bei welchen unsere Differentialgleichung auftritt, verlangen gewöhnlich nebenbei die Entwickelung einer willkürlichen Function nach bestimmten Lösungen u von Differentialgleichungen unseres Typus, in welchen k^2 eine Reihe verschiedener Werthe besitzt. Die so entstehenden Reihenentwickelungen sollen aber im Folgenden von der näheren Betrachtung ausgeschlossen und höchstens gelegentlich kurz erwähnt werden, da sie ja eigentlich nicht zum Gegenstande der Untersuchung gehören. — Da, wie gesagt, immer von der physikalischen Bedeutung der Differentialgleichung und ihrer Lösungen ausgegangen werden soll, so schien es zweckmässig, auf den Abschnitt über die Entstehung der Differentialgleichung zunächst die Betrachtung der eben erwähnten „ausgezeichneten Lösungen", welche sich bei den wichtigsten physikalischen Problemen zuerst darbieten, folgen zu lassen und dann erst zu den allgemeinen Sätzen über die Integrale und zu den allgemeinen Integrationsmethoden (in den Theilen III und IV) überzugehen. Diese Reihenfolge empfiehlt sich übrigens auch schon deshalb, weil bei jenen allgemeinen Untersuchungen die Existenz der „ausgezeichneten Lösungen" als bekannt vorausgesetzt werden muss. — Die Betrachtungen der Theile III und IV bilden das Analogon zur gewöhnlichen Potentialtheorie; daher werden wir deren Sätze häufig zum Vergleich heranziehen und ihre allgemeinen Integrationsmethoden im IV. Theile in einem besonderen Paragraphen kurz besprechen.

---

*) Theory of Sound, deutsch übersetzt von Neesen, Braunschweig 1880.

I. Theil.

Vorkommen der Differentialgleichung.

A. Entstehung in der Physik.

§ 1. Indirectes Auftreten.

In der Physik gelangt man zur Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

(und zu verwandten) in den weitaus meisten und wichtigsten Fällen dadurch, dass man für eine Function des Ortes und der Zeit, welche einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, *hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von der Zeit t eine bestimmte Annahme macht*, nämlich sie gleich dem Producte aus einer trigonometrischen oder Exponentialfunction von t und einer Function der Coordinaten setzt, welche letztere dann der hier zu betrachtenden Gleichung genügen muss. Bei der einen Classe von Problemen, nämlich denjenigen, bei welchen es sich um unendlich kleine *freie Schwingungen* continuirlicher Körper handelt (**a**, **b**, **c** der unten folgenden Aufzählung), führt man als von der Zeit abhängigen Factor eine *trigonometrische* Function der Zeit ein, weil man nach Analogie der Fourier'schen Reihenentwickelung als sicher annimmt, dass die allgemeinste solche Schwingungsart eine Ueberlagerung unendlich vieler *harmonischer*, d. h. durch trigonometrische Functionen von t darstellbarer Schwingungen ist. Diese Annahme findet eine Bestätigung in dem von *G. S. Ohm**) und *H. v. Helmholtz***) aufgestellten akustischen Erfahrungssatze, dass jeder von irgend einem schwingenden Körper erzeugte Klang eine Ueberlagerung einfacher Töne

---

*) G. S. Ohm: Pogg. Ann. **59**, 513—65, 1843; **62**, 1—18, 1844.
) H. v. Helmholtz: Pogg. Ann. **108, 280—290. 1859.

ist, und dass ein einfacher Ton stets von einer *harmonischen* Schwingung hervorgebracht wird.

Dass man bei Problemen der nicht stationären Wärmeleitung die Abhängigkeit von der Zeit als durch eine Exponentialfunction ausdrückbar annimmt, lässt sich nicht durch einen derartigen Erfahrungssatz begründen, sondern beruht wohl nur auf einer mathematischen Analogie. Denn durch die unmittelbare Erfahrung weiss man bei dem Problem der Wärmeleitung nur, dass nach hinreichend langer Zeit ein merklich stationärer Zustand eintritt, und ferner, dass die Temperatur eines sehr kleinen Körpers, der frei Wärme ausstrahlt, nach einer geometrischen Proportion sinkt.

Endlich giebt es auch gewisse Probleme der Potentialtheorie (cf. **e** und **f**), bei welchen man über die Abhängigkeit einer Potentialfunction *V von der einen Raumcoordinate* eine solche Annahme macht, dass V als Function der beiden anderen Coordinaten einer Differentialgleichung von der hier zu betrachtenden Form genügt.

a. Wenn man auch in dem Falle, wo die Function u von nur *einer* Coordinate abhängt, nur eine *gewöhnliche* lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung erhält, so ist es doch für das Verständniss des Folgenden von Nutzen, diesen Fall kurz mit zu behandeln und demnach mit dem berühmten *Probleme der schwingenden Saite* zu beginnen.

Ist die Saite in der Ruhelage parallel der x-Axe, bezeichnet w die transversale Verrückung irgend eines Punktes, welche für alle Punkte in einer festen Ebene stattfinden möge, ferner p die Spannung und ϱ die Masse der Längeneinheit, so ergiebt sich, da die kinetische Energie durch

$$T = \int_0^l \frac{1}{2}\,\varrho \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx,$$

die potentielle (bezogen auf die Ruhelage) durch

$$V = \int_0^l \frac{1}{2}\,p \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx$$

gegeben ist (wo l die Länge der Saite bezeichnet), aus dem Hamilton'schen Princip die Bewegungsgleichung:

$$\varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

Macht man nun den Ansatz

$$w = \sum^n u_n \,.\, \sin \frac{2\pi}{T_n}(t - t_n) = \sum^n u_n \,.\, \sin \frac{t - t_n}{\tau_n},$$

so erhält man für $u_n(x)$ die Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dx}\left(p \frac{du_n}{dx}\right) + \frac{\varrho}{\tau_n^{\,2}} u_n = 0,$$

welche in dem speciellen Falle, wo p und ϱ constant sind, die Form

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} + k_n^{\,2} u_n = 0$$

annimmt. Letztere Form tritt auch auf beim Problem der Luftschwingungen (siehe unten), sofern die Bewegung nur parallel der x-Axe erfolgt, also etwa bei den Schwingungen der Luft in einer unendlich dünnen Röhre. Dabei kann x aber auch die längs irgend einer Curve gemessene Bogenlänge sein, da die Gleichung unverändert bleibt, wenn die Röhre beliebig gekrümmt ist. Denselben Fall unter Beschränkung auf eine ebene Curve kann man sich übrigens auch bei der Saite dadurch realisirt denken, dass dieselbe über eine Cylinderfläche ausgespannt ist, welche so glatt ist, dass die Reibung die transversalen (d. h. den Erzeugenden der Fläche parallelen) Schwingungen der Saite nicht hemmt.

Das einfachste und zur Veranschaulichung geeignetste Beispiel, bei welchem eine der Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

genügende Function von *zwei* Veränderlichen vorkommt, bieten die *transversalen Schwingungen einer gespannten Membran* dar. Die Membran liege, wenn sie sich in ihrer Ruhelage befindet, in der XY-Ebene und besitze die Flächendichtigkeit ϱ, während sonst die eben eingeführten Bezeichnungen beibehalten werden. Dann ist die kinetische Energie

$$T = \int\!\!\int \frac{1}{2}\, \varrho \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx dy,$$

die potentielle

$$V = \iint \frac{1}{2} p \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy,$$

wo die Doppelintegrale über die ganze von der Membran bedeckte Fläche zu erstrecken sind. Hieraus ergiebt sich wieder mittelst des Hamilton'schen Principes in leicht ersichtlicher Weise die Bewegungsgleichung:

$$\varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

und wenn man wieder die Annahme einführt, dass w eine Summe von der Form $\sum^n u_n \cdot \sin \frac{t - t_n}{\tau_n}$ sei, so muss die Function $u_n(x, y)$ der partiellen Differentialgleichung

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial u_n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p \frac{\partial u_n}{\partial y}\right) + \frac{\varrho}{\tau_n^2} u_n = 0$$

genügen, welche im Falle constanter Spannung und Dichte die mit (1) identische Form

$$\text{(B')} \qquad \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + k_n^2 u_n = 0$$

annimmt.

(Veränderliche Spannung der hier betrachteten Art ist durch Einwirkung äusserer Kräfte, z. B. der Schwere bei einer in einer verticalen Ebene ausgespannten Membran, möglich.)

Eine noch allgemeinere Differentialgleichung erhält man, wenn man annimmt, dass die Spannung in verschiedenen *Richtungen* verschieden ist; es giebt dann zwei zu einander senkrechte Richtungen X', Y', in welchen die Spannung ein Maximum p_1 bezw. Minimum p_2 erreicht. Die Richtungscosinus dieser Richtungen bezogen auf X, Y sollen als unabhängig vom Orte angenommen und mit α, β bezw. $-\beta$, α bezeichnet werden. Dann lautet die Differentialgleichung für u_n:

$$\text{(C)} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(p_{11} \frac{\partial u_n}{\partial x} + p_{12} \frac{\partial u_n}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p_{12} \frac{\partial u_n}{\partial x} + p_{22} \frac{\partial u_n}{\partial y}\right) + \frac{\varrho}{\tau_n^2} u_n = 0$$

oder

$$p_{11} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + 2 p_{12} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} + p_{22} \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y}\right) \frac{\partial u_n}{\partial x}$$
$$+ \left(\frac{\partial p_{12}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y}\right) \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{\varrho}{\tau_n^2} u_n = 0,$$

worin

$p_{11} = p_1\alpha^2 + p_2\beta^2, \quad p_{22} = p_1\beta^2 + p_2\alpha^2, \quad p_{12} = (p_2 - p_1)\alpha\beta$

ist. Es ist in diesem Falle

$$V = \int\int \frac{1}{2} \left\{ p_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2p_{12} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + p_{22} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} dx dy;$$

aus der Bedeutung von p_{11}, p_{22} und p_{12} ist unmittelbar klar, dass man durch eine einfache Drehung des Coordinatensystems das Glied mit p_{12} zum Verschwinden bringen kann. Uebrigens liesse sich auch eine Anordnung denken, durch welche man den Fall, wo α und β Functionen des Ortes sind, realisiren könnte; man stelle sich etwa eine Membran vor, welche feine Eisentheilchen einschliesst und sich so in einem magnetischen Felde befindet, dass die Kraftlinien parallel zur Ebene der Membran verlaufen. Die Differentialgleichung hätte dann ebenfalls die Form (C) und würde sich in diesem Falle durch Einführung *krummliniger* Coordinaten auf die Form (B′) reduciren lassen. (Vergl. unten.)

Ein zweites wichtiges Problem der Kategorie a., bei welchem die Differentialgleichung (1) auftritt, ist dasjenige der *freien Schwingungen dünner Luftschichten*, wobei die Bewegung der Lufttheilchen nur parallel den die Schicht begrenzenden Flächen stattfindet. In diesem Falle kann $u \,.\, \sin \frac{t - t'}{\tau}$ entweder das Geschwindigkeitspotential oder die Verdichtung der Luft bedeuten, und es ist $k^2 = \frac{1}{a^2\tau^2}$, unter a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles verstanden. Eine Verallgemeinerung ist hier zunächst dadurch möglich, dass man die letztere als variabel (z. B. in Folge verschiedener Temperatur) annimmt und somit k^2 mit irgend einer Function der Coordinaten multiplicirt in Ansatz bringt. Ausserdem kann man aber statt einer ebenen Luftschicht eine *gekrümmte*, d. h. eine von zwei äquidistanten beliebigen krummen Flächen begrenzte, betrachten; dann tritt an Stelle von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ der zweite Differentialparameter Δu in *krummlinigen Coordinaten* p, q und die Differentialgleichung wird:

$$\text{(D)}\qquad 0 = \frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{G\frac{\partial u}{\partial p} - F\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} + \frac{\partial}{\partial q}\left\{\frac{-F\frac{\partial u}{\partial p} + E\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} + k^2 f(p,q)\sqrt{EG-F^2}\,.\,u,$$

worin E, F, G die bekannten Gaussischen Grössen sind.

Die vorstehende Form der Gleichung ist dieselbe, welche im allgemeinsten Falle bei der Membran gilt (C).

Die Annahme variabeler Dicke der Schicht hat keine weitere wesentliche Verallgemeinerung zur Folge.

Dagegen kann hier, wie bei allen Schwingungsproblemen, in der Differentialgleichung noch *ein von u unabhängiges Glied*, eine beliebige Function der Coordinaten, hinzutreten, wenn nämlich auf alle Punkte des schwingenden Systems stetig vertheilte *äussere Kräfte* wirken, welche sich überall wie eine und dieselbe trigonometrische Function der Zeit ändern. In diesem Falle, den man sich am besten bei einer Membran realisirt denken kann (— z. B. indem dieselbe durch Schwingungen der umgebenden Luft in Bewegung gesetzt wird —), ist k^2 von vornherein bestimmt, da die Periode der Schwingungen mit derjenigen der Kraft übereinstimmen muss. Endlich sei hier auch gleich erwähnt, dass bei der schwingenden Membran eine Vorrichtung denkbar wäre, bei welcher in allen Punkten der Verrückung proportionale Kräfte angreifen; dann würde der mit u multiplicirte Ausdruck die Form $k^2 f + F$ haben, worin f und F irgend welche Functionen der Coordinaten sind.

Die *unendlich kleinen Schwingungen luftförmiger Körper in dreidimensionalen Raumgebieten* hängen bekanntlich, wenn die Existenz eines Geschwindigkeitspotentiales Φ vorausgesetzt wird, von der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = a^2\,\Delta\Phi$$

ab, oder allgemeiner, wenn äussere Kräfte mit dem Potential P einwirken, von der Gleichung

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial P}{\partial t} + a^2\Delta\Phi.$$

Für die Verdichtung $s = \frac{1}{a^2}\left(P - \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)$ gilt, wenn $\Delta P = 0$ ist, immer die Gleichung $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2 \Delta s$.

Setzt man nun hier, falls äussere Kräfte fehlen, auf Grund der Ueberlegung auf S. 4, oder wenn solche vorhanden sind, die überall wie $\cos \frac{t - t_n}{\tau_n}$ variiren, also etwa durch $Q \cos \frac{t - t_n}{\tau_n}$ dargestellt werden, aus dem auf voriger Seite angeführten Grunde $\Phi = u_n \,.\, \sin \frac{t - t_n}{\tau_n}$, so erhält man für u_n im ersten Falle die Differentialgleichung:

$$\Delta u_n + \frac{1}{a^2 \tau_n^2} u_n = 0,$$

und im zweiten Falle:

$$\text{(E)} \qquad \Delta u_n - \frac{Q}{a^2 \tau_n^2} + \frac{1}{a^2 \tau_n^2} u_n = 0.$$

Die Grösse a, welche physikalisch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles bedeutet, kann als Function der Coordinaten betrachtet werden, indem man etwa, wie schon oben erwähnt, die Temperatur der schwingenden Luftmasse als variabel annimmt; auch kann dieser Fall dadurch realisirt werden, dass verschiedene Gase ungleichmässig gemischt sind. —

b. *Die Schwingungen elastischer fester Körper* hängen von den Differentialgleichungen ab:

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \frac{\partial \delta}{\partial x},$$
$$\varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu \Delta v + (\lambda + \mu) \frac{\partial \delta}{\partial y},$$
$$\varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \Delta w + (\lambda + \mu) \frac{\partial \delta}{\partial z},$$

wo u, v, w die Verrückungen parallel den Coordinatenaxen, δ die cubische Dilation, ϱ die Dichte, λ und μ die Elasticitätsconstanten bezeichnen.

u, v, w lassen sich nun durch vier andere Functionen ausdrücken, welche Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \Phi$$

genügen. Man kann nämlich, wie *Stokes**) und *Clebsch***) gezeigt haben, die allgemeinsten Lösungen für u, v, w in der Form darstellen:

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x},$$
$$w = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y},$$

wo nun für P die Differentialgleichung

$$\varrho \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta P,$$

für U, V, W dagegen die Differentialgleichung

$$\varrho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \mu \Delta \Phi$$

bestehen muss.

Die letztere Gleichung gilt insbesondere auch für jede einzelne Verrückungscomponente in einem *incompressibelen* Medium, z. B. dem Aether. (Auch die elektromagnetische Lichttheorie führt auf Differentialgleichungen derselben Form.) Specielle Fälle der obigen allgemeinen elastischen Bewegungsgleichungen sind auch die Differentialgleichungen von der Form $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, welche für die Torsions- und (näherungsweise) für die Longitudinal-Schwingungen von Stäben gelten.

Durch die Annahme harmonischer Schwingungen gelangt man in allen Fällen wiederum zur Differentialgleichung (1).

Wenn man bei den unter **a.** und **b.** erwähnten Problemen für Φ die Summe zweier (oder mehrerer) Lösungen von der Form $u_n' \,.\, \cos \frac{t - t_n'}{\tau_n}$ und $u_n'' \,.\, \cos \frac{t - t_n''}{\tau_n}$ setzt, wo u_n' und u_n'' derselben Differentialgleichung $\Delta u + k_n^2 u = 0$ genügen, so erhält man einen Schwingungszustand, welcher *fortschreitenden Wellen* entspricht; insbesondere erhält man gleichmässig fortschreitende Wellen, wie man sie in der *Optik* betrachtet, wenn $t_n'' = t_n' \pm \frac{\pi}{2} \tau$ ist. Demnach bietet die Be-

*) G. G. Stokes: On the dynamical theory of diffraction. Trans. Cambridge phil. Soc. IX, 1. 1849. Math. Phys. Papers II, p. 258—9.

**) A. Clebsch: Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche. Crelle's Journal Bd. LXI. 195—263. 1863.

handlung fortschreitender Wellen keine neuen Schwierigkeiten dar, wenn man die Lösungen der Differentialgleichung (1) für den betrachteten Raum (— auch in *geschlossenen* Räumen sind in besonderen Fällen „fortschreitende Wellen" möglich —) kennt. Dagegen sind Wellen, welche in einem vorher in Ruhe befindlichen Medium erst *in der Ausbreitung begriffen sind,* bei welchen also die Bewegung des einzelnen Punktes keine rein periodische Function der Zeit ist, von unserer Betrachtung gänzlich *ausgeschlossen.* —

c. Für die *transversalen Schwingungen elastischer Platten* gilt die Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c^4 \Delta\Delta w = 0,$$

also, wenn man $w = u \,.\, \sin \frac{t - t'}{\tau}$ setzt,

$$\Delta\Delta u - \frac{1}{c^4 \tau^2} u = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta\Delta u - k^4 u = 0.$$

Man kann nun schreiben

$$\begin{aligned} \Delta\Delta u - k^4 u &= \Delta(\Delta u - k^2 u) + k^2 (\Delta u - k^2 u) \\ &= \Delta(\Delta u + k^2 u) - k^2 (\Delta u + k^2 u), \end{aligned}$$

woraus ersichtlich ist, dass man der Differentialgleichung $\Delta\Delta u - k^4 u = 0$ genügen kann, wenn man $u = a'u' + a''u''$ setzt und u' der Gleichung $\Delta u' - k^2 u' = 0$, u'' der Gleichung $\Delta u'' + k^2 u'' = 0$ unterwirft. Insofern gehört also auch dieses Problem zu denjenigen, bei welchen unsere Differentialgleichung eine Rolle spielt.

d. Die Differentialgleichung der *Wärmeleitung* in isotropen Körpern lautet

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \Delta v,$$

wo v die Temperatur und a^2 die Wärmeleitungsfähigkeit $\varkappa$ dividirt durch das Product aus Dichte ϱ und specifischer Wärme c ist. Dieselbe Differentialgleichung tritt auch noch in anderen Gebieten der Physik auf, z. B. bei der *Diffusion* und bei der Ausbreitung elektrischer Ströme in unbegrenzten Leitern durch Selbstinduction. — Dieser Differentialgleichung sucht man durch den Ansatz

$$v = \sum^n u_n \cdot e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

zu genügen; wie man dazu kommt, wurde schon oben (S. 5) angedeutet. Es ergiebt sich dann für u_n wieder:

$$\Delta u_n + \frac{1}{a^2 \tau_n} u_n = 0.$$

Natürlich kann auch hier a^2 variabel sein, wenn dies von der Dichte und specifischen Wärme gilt; auch ist dieselbe Verallgemeinerung der Differentialgleichung, welche für den Fall von zwei Dimensionen bei der Membran besprochen wurde, hier dadurch möglich, dass man die Wärmeleitungsfähigkeit als veränderlich mit dem Orte und der Richtung, also den Körper als inhomogen und krystallinisch annimmt. Die so erhaltene Differentialgleichung hat die Form:

$$\begin{aligned}
&\varkappa_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varkappa_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varkappa_{33}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\varkappa_{23}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2\varkappa_{31}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
&\quad + 2\varkappa_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \varkappa_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varkappa_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \varkappa_{13}}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial x} \\
(\mathrm{F}) \qquad &\quad + \left(\frac{\partial \varkappa_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varkappa_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varkappa_{23}}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y} \\
&\quad + \left(\frac{\partial \varkappa_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varkappa_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varkappa_{33}}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\varrho c u}{\tau_n} = 0.
\end{aligned}$$

Die vorstehende Form, welche, falls u von nur *zwei* Coordinaten abhängt, mit (C) und (D) übereinstimmt, nimmt auch die Differentialgleichung $\Delta u + \frac{1}{a^2 \tau} u = 0$ bei Einführung allgemeiner *krummliniger* Coordinaten an.

Natürlich sind hier auch solche Fälle denkbar, wo u nur von zwei Coordinaten oder von einer Coordinate abhängt. Bei eindimensionalen Gebieten (Drähten) gilt dieselbe partielle Differentialgleichung übrigens für das *elektrische Potential*, wenn ein galvanischer Strom im Entstehen ist (Ausbreitung des Stromes in Kabeln).

Bei der nicht stationären Wärmeleitung in Platten oder Drähten kann in der obigen allgemeinen Differentialgleichung auch noch ein Glied von der Form $-h(u - U)$ hinzutreten, nämlich wenn die Oberfläche nach dem gewöhnlich angenommenen Gesetze (wonach die ausgestrahlte Wärmemenge proportional der Temperaturdifferenz zwischen dem aus-

strahlenden Flächenelement und dem äusseren Medium ist) Wärme gegen ihre Umgebung ausstrahlt, und die Temperatur der letzteren durch $Ue^{-\frac{t}{\tau_n}}$ gegeben ist, d. h. räumlich beliebig vertheilt ist und mit der Zeit überall im Verhältniss $e^{-\frac{t}{\tau_n}}$ sinkt. Die Grösse h bedeutet das äussere Wärmeleitungs- oder Ausstrahlungsvermögen und ist daher stets *positiv*, kann aber sonst eine beliebige Function der Coordinaten sein. — In diesem Falle ist τ_n, also auch der Factor von u in der Differentialgleichung, von vornherein *gegeben*, wie bei den *erzwungenen* Schwingungen von Membranen u. s. w. —

e. Wie schon erwähnt, können Differentialgleichungen der hier betrachteten Art auch bei Aufgaben der *Potentialtheorie* auftreten, nämlich dadurch, dafs man in die Potentialgleichung $\Delta V = 0$ (bezw. deren allgemeine Form in orthogonalen krummlinigen Coordinaten) für V das Product aus einer Function der einen Coordinate allein, die einer bestimmten gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, und einer Function der zwei anderen Coordinaten einsetzt; die letztere Function muss dann eine partielle Differentialgleichung von der hier zu betrachtenden Art erfüllen.

Die erwähnte allgemeine Form der Potentialgleichung heisst, wenn ξ_1, ξ_2, ξ_3 die krummlinigen Coordinaten sind, und $h_1 d\xi_1^2 + h_2 d\xi_2^2 + h_3 d\xi_3^2$ das Quadrat des Linienelementes ist,

$$0 = \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2 h_3}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\sqrt{\frac{h_2 h_3}{h_1}}\frac{\partial V}{\partial \xi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\sqrt{\frac{h_3 h_1}{h_2}}\frac{\partial V}{\partial \xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\sqrt{\frac{h_1 h_2}{h_3}}\frac{\partial V}{\partial \xi_3}\right)\right\};$$

setzt man hierin nun z. B.

$$V = W . U,$$

wo W nur von ξ_3 abhängt und der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\sqrt{\frac{h_2 h_1}{h_3}}\frac{\partial W}{\partial \xi_3}\right) = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) . W$$

genügt (wozu die Functionen $\frac{h_1 h_2}{h_3}$ und f gewissen Beschränkungen unterliegen müssen), so ergiebt sich:

$$\text{(G)}\quad \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\sqrt{\frac{h_2 h_3}{h_1}}\frac{\partial U}{\partial \xi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\sqrt{\frac{h_3 h_1}{h_2}}\frac{\partial U}{\partial \xi_2}\right) + f \cdot U = 0.$$

Durch derartige Particularlösungen von der Form $W \cdot U$ kann man der Differentialgleichung des Potentials insbesondere genügen, wenn es sich um die Lösung der fundamentalen Potentialaufgabe, d. h. um die Bestimmung von V aus gegebenen Randwerthen, für Räume handelt, welche, allgemein zu reden, von sechs confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt werden*). In diesem Falle, wo ξ_1, ξ_2, ξ_3 die elliptischen Coordinaten μ, ν, ϱ sind, und die Potentialgleichung die Form

$$\begin{aligned} 0 = (\nu - \varrho)\sqrt{f(\mu)}\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\sqrt{f(\mu)}\frac{\partial V}{\partial \mu}\right) \\ + (\varrho - \mu)\sqrt{f(\nu)}\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\sqrt{f(\nu)}\frac{\partial V}{\partial \nu}\right) \\ + (\mu - \nu)\sqrt{f(\varrho)}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\sqrt{f(\varrho)}\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right) \end{aligned}$$

annimmt, worin

$$f(\lambda) = (\lambda - e_1)(\lambda - e_2)(\lambda - e_3), \quad (\lambda = \mu, \nu, \varrho),$$

gesetzt ist und e_1, e_2, e_3 gegebene Constanten sind, würde man z. B. diejenige Potentialfunction, welche auf den Begrenzungsflächen $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$ vorgeschriebene Werthe besitzt, aus Particularlösungen von der Form $E_3(\varrho) . U(\mu, \nu)$ zusammensetzen, wo E_3 eine *Lamé'sche Function* ist, d. h. der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 E}{d\varrho^2} + \frac{1}{2}\frac{f'(\varrho)}{f(\varrho)}\frac{dE}{d\varrho} - \frac{A\varrho + B}{4 f(\varrho)} E = 0$$

mit passend bestimmten Constanten A und B genügt. Für U ergiebt sich dann die partielle Differentialgleichung:

$$\text{(G')}\quad \begin{aligned} (\nu - \varrho)\sqrt{f(\mu)}\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\sqrt{f(\mu)}\frac{\partial U}{\partial \mu}\right) + (\varrho - \mu)\sqrt{f(\nu)}\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\sqrt{f(\nu)}\frac{\partial U}{\partial \nu}\right) \\ + (\mu - \nu)\frac{A\varrho + B}{4} U = 0. \end{aligned}$$

---

*) F. Klein: Math. Ann. 18, 410. 1881.

Als specielle Fälle bezw. Grenzfälle dieser Differentialgleichung (G′) können diejenigen betrachtet werden, auf welche man bei den vielfach behandelten Potentialbestimmungen für *Cylinder* und *Kugelsectoren* geführt wird. Bei cylindrischen (oder prismatischen) Körpern benutzt man, um ein Potential V darzustellen, welches auf den Grundflächen gegebene Werthe hat und längs der Mantelfläche $= 0$ ist oder der allgemeinen Bedingung $h V + \frac{\partial V}{\partial n} = 0$ genügt, Particularlösungen von der Form $u e^{\pm kx}$, wo dann gelten muss:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0.$$

Andererseits kann man, wenn für die Mantelfläche des Cylinders, welche parallel der x-Axe sei, die Werthe von V gegeben sind und für die Endflächen eine Grenzbedingung $h V \pm \frac{\partial V}{dx}$ vorgeschrieben ist, durch Particularlösungen $u \,.\, \sin k(x - x_0)$ zum Ziele gelangen und hat dann für u die Differentialgleichung $\Delta u - k^2 u = 0$. Es ist leicht zu sehen, dass diese beiden Fälle bei der stationären Wärmeströmung sehr wohl realisirbar sind. Ausserdem erhält man durch Superposition der beiden Lösungen, von denen die eine auf den Endflächen, die andere auf der Mantelfläche gegebene Werthe besitzt und je auf dem anderen Theil der Begrenzung verschwindet, die Lösung der *allgemeinen* Randwerthaufgabe, worauf im IV. Theile näher eingegangen werden wird. — Der zweite schon erwähnte specielle Fall liegt vor, wenn für einen Körper, der von zwei concentrischen Kugelflächen und einer beliebigen zu denselben orthogonalen Kegelfläche begrenzt wird, die Gleichung $\Delta V = 0$ so integrirt werden soll, dass V auf den Kugelflächenstücken vorgeschriebene Werthe, auf der Kegelfläche den Werth 0 annimmt (oder eine verschwindende Derivirte nach deren Normale hat). Man setzt bei diesem Probleme V aus Particularlösungen von der Gestalt $r^n U_n$ und $r^{-n-1} U_n$ zusammen, wo n eine vorläufig unbestimmte Zahl ist und U_n der partiellen Differentialgleichung

$$(\mathrm{G}'') \quad \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial u_n}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1)u_n = 0$$

genügen muss. Hier ist ϑ die „Poldistanz“, φ die „geographische Länge“; es sei gleich bemerkt, dass es unter Umständen zweckmässig sein kann, andere Coordinaten, z. B. elliptische, auf der Kugel einzuführen, welcher letztere Fall später erörtert werden wird.

f. Ein hydrodynamisches Problem, bei welchem die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ eine Rolle spielt, möge hier, obwohl es sich der einen oben besprochenen Potentialaufgabe für Cylinder subsummirt, noch besondere Erwähnung finden, weil es sich dabei um harmonische Schwingungen handelt und somit leicht der Anschein erweckt werden kann, als ob dasselbe hinsichtlich der Entstehung der Differentialgleichung zu der Gruppe der unter **a.** bis **c.** besprochenen Schwingungsprobleme gehörte. Es ist das in dieser Form u. A. von *Kirchhoff**) behandelte Problem der *unendlich kleinen Schwingungen, welche eine in einem cylindrischen Gefäss mit verticaler Wandung und horizontalem ebenen Boden eingeschlossene Flüssigkeit unter der Wirkung der Schwere ausführen kann.*

Hierbei wird angenommen, dass ein *Geschwindigkeitspotential* φ existirt. Ist die z-Axe vertical nach oben gerichtet, und ist $z = 0$ für die in Ruhe befindliche Oberfläche, $z = -h$ für die Bodenfläche, so muss φ zunächst der Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ und den Randbedingungen $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ für $z = -h$, sowie $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ an dem Cylindermantel genügen. An der freien Oberfläche muss der *Druck* constant sein, welcher durch die Formel

$$\frac{p}{\varrho} = \text{Const.} - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - gz$$

gegeben ist; dies ergiebt bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -g\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad \text{für } z = 0.$$

Man genügt nun hier der Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ und

---

*) G. Kirchhoff: Mechanik (Leipzig 1877), S. 354—359.

der Grenzbedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ für $z = -h$ durch Particularlösungen

$$\varphi = \psi \{ e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)} \},$$

wo $\psi(x, y)$ die Gleichung

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0$$

und die Grenzbedingung $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ erfüllen muss (aus welcher letzteren sich die zulässigen Werthe von k^2 bestimmen). Endlich geht die Bedingung für die freie Oberfläche über in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(e^{kh} + e^{-kh}) \frac{d^2 \psi}{dt^2} + gk(e^{kh} - e^{-kh}) \psi = 0,$$

woraus folgt, dass ψ eine *trigonometrische* Function der Zeit ist, also die Form $u \cos kc(t - t')$ hat; für $u(x, y)$ gilt natürlich wieder die Differentialgleichung (1).

Es sei noch besonders hervorgehoben, dass k in allen in diesem Paragraphen erwähnten Fällen, ausgenommen e, stets *reell* ist.

§ 2. **Directes Auftreten der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in der Physik.**

Physikalische Probleme, bei welchen die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ *unmittelbar*, d. h. ohne Einführung einer speciellen Annahme über die Abhängigkeit einer Function von der Zeit oder von einer Coordinate, auftritt, giebt es, soweit mir bekannt, nur zwei; bei beiden ist u eine Function von nur zwei Variabeln (Coordinaten auf einer Fläche).

a. Die horizontale Grundfläche eines beliebigen Cylinders sei von einer gespannten *Membran* gebildet, während die verticale Mantelfläche aus starrem Material bestehe. Dann wird, wenn der Cylinder bis zur Höhe c über der Ebene X, Y des unteren Randes (der ursprünglichen Gleichgewichtslage der Membran) *mit einer Flüssigkeit angefüllt* wird, die Membran eine bestimmte neue Gleichgewichtslage annehmen, indem sie sich ein wenig nach unten ausbaucht; die dabei stattfindende Senkung eines Punktes x, y der Membran soll mit $u(x, y)$ bezeichnet und als unendlich

klein betrachtet werden. Dabei wird der auf jedes Flächenelement df wirkenden, nach oben gerichteten Spannungscomponente, welche durch $p\int\frac{\partial u}{\partial n}ds = p\Delta u df$ gegeben ist, das Gleichgewicht gehalten durch das Gewicht der darüber stehenden Flüssigkeitssäule, welches $= \sigma(u + c)df$ ist, wenn σ das specifische Gewicht der Flüssigkeit bezeichnet. Demnach erhält man für die Function u von x, y die Differentialgleichung

$$\Delta u + \frac{\sigma}{p}u + \frac{\sigma}{p}c = 0,$$

welche, wenn man $u' = u + c$ einführt, in die Form

$$\Delta u' + k^2 u' = 0$$

übergeht. Indem man die Spannung und Dicke als variabel betrachtet oder allgemeine krummlinige Coordinaten einführt, kann man auch hier auf eine Differentialgleichung von derselben Allgemeinheit kommen, wie sie die unter (C) für die *Schwingungen* einer Membran aufgestellte besitzt. Die *Dichte* der Membran ist beim vorliegenden Problem natürlich ohne Einfluss.

b. Das zweite Problem der bezeichneten Art ist das der *stationären Wärmeströmung in einer gegen die Umgebung frei ausstrahlenden Platte.*

Die Differentialgleichung, welche in diesem Falle für die Temperatur u gilt, erhält man aus der in § 1. **d.** aufgestellten einfach dadurch, daſs man $\tau_n = \infty$ setzt; dann wird nämlich die Temperatur v von der Zeit unabhängig und $= \Sigma u_n = u$. Es ergiebt sich so für isotrope ebene Platten

$$\delta\varkappa \, . \, \Delta u - h(u - U) = 0,$$

worin $\varkappa$ und h die frühere Bedeutung haben, δ die (sehr kleine) Dicke der Platte und U die in Bezug auf die Zeit constante, aber längs der Platte beliebig vertheilte Temperatur der Umgebung bezeichnet. Wenn letztere überall gleich ist, so kann man sie ohne Beschränkung gleich Null setzen und erhält

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

wo k^2 aber sicher *negativ*, also k *rein imaginär* ist im Gegen-

satz zu dem vorhergehenden Falle, wo k^2 der Natur der Sache nach nothwendig *positiv* war. Wenn die leitende Platte zwar eben, aber krystallinisch und von variabler Dicke und Leitungsfähigkeit, oder wenn sie beliebig gekrümmt ist, so tritt an Stelle von $\delta \varkappa \Delta u$ der früher aufgestellte allgemeine Differentialausdruck; auch der Factor von u kann eine beliebige Function des Ortes sein, jedoch mit der Beschränkung, nur *negative* Werthe anzunehmen, (da ein negatives Ausstrahlungsvermögen h wohl nicht vorkommen kann). Ist u nur von *einer* Coordinate abhängig, so erhält man die bekannte gewöhnliche Differentialgleichung für die stationäre Wärmeströmung in einem dünnen Stabe, dessen Oberfläche frei ausstrahlt.

§ 3. Allgemeinste Gleichungsform, welche bei den im Vorhergehenden erwähnten physikalischen Problemen vorkommt.

Die allgemeinste Differentialgleichung, welche bei den besprochenen physikalischen Aufgaben auftritt und im Folgenden in den Bereich der Betrachtung gezogen werden soll, hat die nachstehende Form;

bei 3 unabhängigen Variabeln (cf. Gleichung E und F):

$$\begin{aligned} & a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 a_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2 a_{31} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \\ (2) \qquad & + 2 a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + \frac{\partial a_{12}}{\partial y} + \frac{\partial a_{13}}{\partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \\ & + \left(\frac{q a_{12}}{\partial x} + \cdot\cdot + \cdot\cdot \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial a_{13}}{\partial x} + \cdot\cdot + \cdot\cdot \right) \frac{\partial u}{\partial z} \\ & + a u + a_0 = 0, \end{aligned}$$

bei 2 Variabeln (cf. B, C, D und G):

$$\begin{aligned} & a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + \frac{\partial a_{12}}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \\ (3) \qquad & + \left(\frac{\partial a_{12}}{\partial x} + \frac{\partial a_{22}}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \\ & + a u + a_0 = 0, \end{aligned}$$

bei einer Variabeln (cf. A):

$$(4) \qquad a_{11} \frac{d^2 u}{d x^2} + \frac{d a_{11}}{d x} \frac{d u}{d x} + a u + a_0 = 0.$$

Darin können die Coefficienten a_{hk}, a, a_0 beliebige Functionen der unabhängigen Variabeln sein. Meistens wird von denselben aber a_0 gleich Null, oder, was im Wesentlichen auf dasselbe hinauskommt, gleich einer Constanten gesetzt werden. Ferner ist hervorzuheben, dass in Folge der physikalischen Entstehung der Differentialgleichung die Coefficienten a_{hk} so beschaffen sind, dass die quadratische Form $\Sigma a_{hk} \xi_h \xi_k$ eine *definite* ist.

B. Vorkommen der zu betrachtenden Differentialgleichung in rein mathematischen Arbeiten.

§ 4. Untersuchungen über die Differentialgleichung an und für sich.

Es ist hier zunächst eine Reihe von Arbeiten zu erwähnen, in welchen die oben angeführten allgemeinen Differentialgleichungen an sich, ohne Anwendung auf besondere Probleme, untersucht werden.

a. Mit den Integralen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(a_{11}\frac{du}{dx}\right) + au = 0,$$

auf welche sich übrigens die allgemeinste lineare homogene Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$P\frac{d^2u}{dx^2} + Q\frac{du}{dx} + Ru = 0$$

dadurch zurückführen lässt, dass man sie mit dem integrirenden Factor der zwei ersten Glieder multiplicirt, haben sich *Sturm* und *Liouville**) beschäftigt. Ihre wichtigsten Resultate werden später Erwähnung finden. Dies ist dadurch zu rechtfertigen, dass jene Resultate das Verständniss der Eigenthümlichkeiten, welche die Lösungen der von uns zu betrachtenden partiellen Differentialgleichungen darbieten, wesentlich erleichtern. Dagegen würde es dem Zwecke dieser

---

*) Liouville's Journ. I, p. 106, 253, 269, 375. 1836.

Schrift natürlich nicht entsprechen, auf die zahlreichen mathematischen Untersuchungen über *specielle* lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung einzugehen.

b. In neuerer Zeit haben *Du Bois-Reymond*, *Picard* und *Bianchi* Abhandlungen über lineare partielle Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln veröffentlicht, worin ausser anderen wichtigen Problemen, die zum Theil später besprochen werden sollen, die Frage der *Reduction* jener Differentialgleichungen auf Normalformen behandelt wird.

*Du Bois-Reymond**) hat gezeigt, dass sich die allgemeinste *homogene* lineare partielle Differentialgleichung 2ter Ordnung:

$$R\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + T\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + Zu = 0$$

durch Einführung neuer reeller unabhängiger Variabeln

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \varphi_1(x, y)$$

stets auf eine der drei Formen

$$\text{I.} \quad S'\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + P'\frac{\partial u}{\partial \xi} + Q'\frac{\partial u}{\partial \eta} + Zu = 0,$$

$$\text{II.} \quad R'\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + P'\frac{\partial u}{\partial \xi} + Q'\frac{\partial u}{\partial \eta} + Zu = 0,$$

$$\text{III.} \quad R'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + P'\frac{\partial u}{\partial \xi} + Q'\frac{\partial u}{\partial \eta} + Zu = 0$$

bringen lässt, und zwar auf die Form

$$\begin{array}{lll} \text{I,} & \text{wenn} & S^2 - 4RT > 0, \\ \text{II,} & \text{„} & S^2 - 4RT = 0, \\ \text{III,} & \text{„} & S^2 - 4RT < 0 \quad \text{ist.} \end{array}$$

Der genannte Mathematiker behandelte eingehend nur die Differentialgleichungen des Typus I, welchen er den hyperbolischen nennt im Gegensatz zum parabolischen Typus II und zum elliptischen III. Da nun unsere Differentialgleichung zum *elliptischen* Typus gehört (vergl. die Bemerkung am Schlusse von § 3), so kommt die Abhandlung *Du Bois-Reymond's* für uns weiter kaum in Betracht.

Dagegen bezieht sich die Untersuchung von *Bianchi***)

---

*) Crelle's Journal 104, Capitel IV u. V. 1889.

**) Rendiconti della R. Accad. dei Lincei V, 2, 1889, p. 5.

ausschliefslich auf die Differentialgleichungen vom *elliptischen* Typus, und zwar auch auf nicht homogene; die von *Bianchi* betrachtete allgemeine Form ist also:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}=\gamma u+\delta,$$

worin die Coefficienten nur der Ungleichung

$$ac>b^2$$

unterworfen sind. (Man pflegt diese Bedingung auch so auszusprechen: die *Charakteristiken* sollen *imaginär* sein.) Zunächst interessiren uns hier nur die auf die *Reduction* der Differentialgleichung bezüglichen Resultate *Bianchi's.* Führt man neue Variabele ξ, η ein und setzt $\frac{\partial\xi}{\partial x}=\xi_1$, $\frac{\partial\xi}{\partial y}=\xi_2$, $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\xi_{11}$ u. s. w., so werden die Coefficienten der transformirten Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
a' &= a\xi_1^2+2b\xi_1\xi_2+c\xi_2^2\\
b' &= a\xi_1\eta_1+b(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1)+c\xi_2\eta_2,\\
c' &= a\eta_1^2+2b\eta_1\eta_2+c\eta_2^2,\\
\alpha' &= a\xi_{11}+2b\xi_{12}+c\xi_{22}+\alpha\xi_1+\beta\xi_2,\\
\beta' &= a\eta_{11}+2b\eta_{12}+c\eta_{22}+\alpha\eta_1+\beta\eta_2,\\
\gamma' &= \gamma.
\end{aligned}$$

Hieraus geht hervor, dass man α' und β' zum Verschwinden bringen kann, indem man für ξ und η irgend zwei Integrale der partiellen Differentialgleichung

$$F(u)=0$$

nimmt, wobei unter $F(u)$ die linke Seite der ursprünglichen Differentialgleichung verstanden ist. Durch diese Verfügung über ξ und η wird aber natürlich verhindert, dass man gleichzeitig die Coefficienten der zweiten Differentialquotienten in der Weise reduciren kann, wie es bei *Du Bois-Reymond* geschehen ist. Man kann nun, nachdem so $F(u)$ auf die Form

$$a'\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2b'\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+c'\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$$

gebracht ist, einen Multiplicator μ so bestimmen, dass

$$\mu F(u) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$$

wird, wo φ und ψ homogene lineare Functionen von $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ sind. Setzt man nämlich

$$\mu F(u) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\mu a' \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left((2\mu b' - \alpha)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \mu c' \frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

so erhält man zur Bestimmung von μ und α die Gleichungen

$$\frac{\partial \mu c'}{\partial \eta} = -\frac{\partial \alpha}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \mu a'}{\partial \xi} + 2\frac{\partial \mu b'}{\partial \eta} = \frac{\partial \alpha}{\partial \eta};$$

man kann demnach für μ irgend ein Integral der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \mu a'}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 \mu b'}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \mu c'}{\partial \eta^2} = 0$$

(der sogen. adjungirten Gleichung*) zu $F(u) = 0$) nehmen und hat dann zu setzen:

$$\alpha = \int\left\{-\frac{\partial \mu c'}{\partial \eta}d\xi + \left(\frac{\partial \mu a'}{\partial \xi} + 2\frac{\partial \mu b'}{\partial \eta}\right)d\eta\right\}.$$

Die *Bianchi*'sche Normalform der allgemeinsten linearen partiellen Differentialgleichung (deren elliptischer Typus hierbei noch nicht in Betracht kommt) ist also:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{a\frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha\frac{\partial u}{\partial \eta}\right\} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left\{(2b - \alpha)\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi} + c\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}\right\} = \gamma u + \delta,$$

wo $a, \alpha, b, c, \gamma, \delta$ beliebige Functionen von ξ, η sind.

Bianchi führt die analoge Transformation auch für den Fall durch, dass u von mehr als zwei Variabeln $x_1 \ldots x_k \ldots$ abhängt. Das Resultat ist, dass die Differentialgleichung

$$\sum_i \sum_k a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i b_i \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = \gamma u + \delta$$

auf die Form

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i'} \sum_k \alpha_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k'} = \gamma' u + \delta'$$

gebracht werden kann, worin im Allgemeinen nicht $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ ist.

Einer anderen Beschränkung unterwirft *Picard* die linearen

---

*) Darboux, Théorie générale des surfaces, Paris 1887; § 354.

partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche er in seiner ersten hierher gehörigen Arbeit (im Band XII der Acta mathematica, 1889) untersucht. Er setzt nämlich voraus, dass die Differentialgleichung der Ausdruck für das Verschwinden der ersten Variation eines über den Bereich der Function u zu erstreckenden Doppelintegrales ist, dessen Element eine quadratische Form von $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ mit beliebig variabeln Coefficienten ist. Heisst jene quadratische Form

$$(5)\quad F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = Au^2 + A'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + A''\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2B'u\frac{\partial u}{\partial y} + 2B''u\frac{\partial u}{\partial x},$$

so ergiebt sich als Bedingung für das Verschwinden von

$$\delta\int\!\!\int F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$$

die Gleichung

$$(6)\quad A'\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + A''\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial A''}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - A\right)u = 0,$$

welche aus der *Bianchi*'schen dadurch hervorgeht, dass man in letzterer speciell $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ (bezw. $b = \alpha$) und δ' (bezw. δ) $= 0$ setzt. Damit eine homogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(6')\quad a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0$$

zu dieser Classe gehöre, muss zwischen den Coefficienten eine Bedingungsgleichung bestehen, nämlich

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{c\left(d - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right) - b\left(e - \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y}\right)}{ac - b^2}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{a\left(e - \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y}\right) - b\left(d - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right)}{ac - b^2}\right\},$$

welche z. B. immer erfüllt ist, falls die Coefficienten constant sind. Wenn die Coefficienten ihr genügen, so unterscheiden sie sich von denjenigen A', $2B$ u. s. w. der oben angegebenen Gleichung (6) nur um einen gemeinsamen Factor

$\lambda(x, y)$, der als Function von x, y dadurch bestimmt ist, dass $\frac{\partial \log \lambda}{\partial x}$ und $\frac{\partial \log \lambda}{\partial y}$ gleich den in der Bedingungsgleichung nach y bezw. x differentiirten Ausdrücken sind. Demnach kann man, wenn eine Differentialgleichung dieser Classe gegeben ist, aus ihren Coefficienten rückwärts diejenigen der quadratischen Form bestimmen, aus welcher sie sich durch Variation ableiten lässt. Dabei bleiben aber B'', B', A in gewissem Grade willkürlich, da sie nur der einen Gleichung

$$\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - A = \lambda f \tag{7}$$

zu genügen brauchen; dies ist für die im IV. Theile zu besprechenden Untersuchungen *Picard's* von Wichtigkeit. Man sieht aus dem Vorhergehenden, dass sich die Picard'sche Differentialgleichung mit der von uns zu betrachtenden völlig deckt, sobald man einerseits in letzterer das absolute Glied a_0 fortlässt, andererseits die Coefficienten der Picard'schen Gleichung der Ungleichung

$$ac > b^2 \quad \text{oder} \quad AA'' > B^2$$

unterwirft, welche aussagt, dass die zu Grunde gelegte quadratische Form *definit* ist.

Daher ist es wohl angebracht, auf die von *Picard* durchgeführte *Transformation* dieser Differentialgleichung etwas einzugehen. Statt der Differentialgleichung selbst transformirt *Picard* die zugehörige quadratische Form, in welcher B'' und B' von vornherein gleich Null gesetzt werden können. Durch Einführung neuer Variabeln X, Y kann man zunächst den Ausdruck

$$A'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + A''\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

auf die Form $\mu\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)^2\right\}$ bringen. Diese Variabeln X, Y sind dieselben, für welche

$$A''dx^2 - 2Bdxdy + A'dy^2$$

sich auf $M(dX^2 + dY^2)$ reducirt; man findet sie daher, indem man die Differentialgleichung der Charakteristiken

$$A''dx^2 - 2Bdxdy + A'dy^2 = 0$$

integrirt, deren Integrale, wenn $A'A'' > B^2$ ist, die Form $X \pm iY$ haben, wobei

$$dX = C(A''dx - Bdy), \quad dY = C\sqrt{A'A'' - B^2}\,dy$$

ist.

Damit die neuen Variabeln reell werden, muss die oben schon erwähnte Bedingung $A'A'' - B^2 > 0$ erfüllt sein.

Das Doppelintegral

$$\iint\left\{A'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + A''\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + Au^2\right\}dxdy$$

geht jetzt über in

$$\iint\left\{\mu^2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)^2\right\} + \mu' Au^2\right\}dXdY,$$

wo μ und μ' Functionen von X, Y sind, und dementsprechend die betrachtete Differentialgleichung in

$$\mu^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial \mu}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial \mu}{\partial Y}\right)\mu - \mu' Au = 0.$$

Führt man nun statt u als abhängige Variable $u \,.\, \mu = u'$ ein, so ergiebt sich

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial Y^2}\right) - \left\{\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial Y^2}\right) + A\frac{\mu'}{\mu}\right\}u' = 0$$

oder

$$\Delta u' + k^2 f(X, Y)\,u' = 0. \tag{8}$$

Damit ist gezeigt, dass sich alle von uns zu betrachtenden Differentialgleichungen auf die vorstehende einfache Form bringen lassen*), worin nur noch eine gegebene Function von X, Y additiv hinzutritt, falls in der ursprünglichen Differentialgleichung ein solches Glied vorhanden war. Dasselbe gilt im Falle von drei unabhängigen Variabeln. Daraus geht hervor, dass die Betrachtung der Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 f u = 0$$

mit variabelem f schon unseren ganzen Gegenstand umfasst,

*) Ein besonderer Fall ist die von *Stokes* (Cambridge and Dublin Math. Journ. VI, p. 215. 1851) benutzte Reduction der Differentialgleichung für die Wärmeleitung in einem homogenen *krystallinischen* Körper auf die Form $\Delta u + k^2 u = 0$ durch Einführung *schiefwinkliger* Coordinaten und geeigneter Längeneinheiten, also durch affine Transformation; hierbei sind die Coefficienten der ursprünglichen Differentialgleichung Constanten, folglich wird auch μ nur ein constanter Factor.

und dass die über die Integrale derselben aufgestellten Sätze eine sehr allgemeine Bedeutung haben. Ist die ursprüngliche Differentialgleichung in der Form

$$(8') \qquad \frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{G\frac{\partial u}{\partial p} - F\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} + \frac{\partial}{\partial q}\left\{\frac{-F\frac{\partial u}{\partial p} + E\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} + k^2 f(p,q)\cdot\sqrt{EG-F^2}\,.\,u = 0$$

gegeben, so sind die nach dem angegebenen Verfahren zu bestimmenden neuen Variabeln X, Y dieselben, welche man einführen würde, um die krumme Fläche, deren Linienelement

$$= \sqrt{Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2}$$

ist, auf die Ebene *conform abzubilden.* Demnach kann man z. B. statt der Schwingungen einer gekrümmten Luftschicht von constanter Dicke und Temperatur diejenigen einer ebenen Luftschicht von in bestimmter Weise variabeler Temperatur oder einer Membran von variabeler Dichte betrachten.

Hier ist es wohl am Platze, einige Bemerkungen über das *Verhalten der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 f(x,y)\,u = 0$$

bei der conformen Abbildung hinzuzufügen. Die Differentialgleichung des logarithmischen Potentiales $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ bleibt bekanntlich bei der conformen Abbildung ganz unverändert, was in der Potentialtheorie den grossen Vortheil gewährt, aus der bekannten Lösung für irgend ein einfach gestaltetes Gebiet diejenige für ein anderes gegebenes Gebiet ableiten zu können. So günstig liegen die Verhältnisse zwar bei unserer Differentialgleichung nicht, aber immerhin sind sie noch von bemerkenswerther Einfachheit. Führt man nämlich neue Variabele x', y' so ein, dass der gegebene Bereich von u in der XY-Ebene auf einen anderen in der $X'Y'$-Ebene conform abgebildet wird, setzt man also

$$x + iy = F(x' + iy'),$$

wo F eine beliebige analytische Function bezeichnet, so ändert sich an der Differentialgleichung weiter nichts, als dass $k^2 f\,.\,u$ noch den Factor

$$F(x' + iy') \,.\, F_1(x' - iy')$$

erhält*), welcher *das Reciproke des Flächenvergrösserungsverhältnisses* ist. Dies bedeutet z. B. für das Problem der schwingenden Membran, dass die Lösung der Differentialgleichung ihre *Form* vollständig beibehält, wenn man das von der Membran bedeckte Ebenenstück auf irgend ein anderes conform abbildet und dabei die Dichtigkeit so ändert, als ob die Flächenelemente der Membran bei unveränderter Masse und Spannung wirklich so auseinandergezogen würden, wie es der conformen Abbildung entspricht. (Die Knotenlinien der in dieser Beziehung zu einander stehenden Membranen sind Curven, die sich bei der conformen Abbildung entsprechen, und die Eigentöne stimmen überein.) Demnach kann man eine beliebige homogene Membran durch eine andere von vorgeschriebener Begrenzung, aber variabeler Dichte ersetzen. Man kann aber nicht umgekehrt das Problem für eine *beliebige* inhomogene Membran auf dasjenige für eine homogene zurückführen, sondern dies ist nur möglich, wenn die Dichte der ersteren als Function von x, y einer gewissen Bedingung genügt. Sind ε und ε_0 die Dichten der beiden einander durch conforme Abbildung entsprechenden Membranen in der XY- und $X'Y'$-Ebene, und soll ε_0 constant werden, so muss, wie *Routh***) gezeigt hat, ε der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \log \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log \varepsilon}{\partial y^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 \log \varepsilon}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \log \varepsilon}{\partial y'^2} = 0$$

genügen. Es folgt dies auch einfach daraus, dass nach dem Vorhergehenden $\log \varepsilon$ der reelle Theil einer Function des complexen Argumentes $x + iy$ oder $x' + iy'$ ist. — Die vorhergehenden Bemerkungen gelten natürlich mit leicht ersichtlichen Modificationen auch für die anderen Probleme (Luftschwingungen, Wärmeströmung), bei welchen die Gleichung $\Delta u + k^2 f(x, y) u = 0$ für ebene Bereiche auftritt.

Endlich sei hier noch hervorgehoben, dass hiernach die

---

*) F_1 bezeichnet die zu F conjugirte Function.

**) E. J. Routh: Dynamics of a system of rigid bodies. Advanced part. 4. Aufl. London, Macmillan and Co. 1884, p. 333.

Integration unserer Differentialgleichung für correspondirende Gebiete auf einander *abwickelbarer* Flächen genau *die gleiche* ist.

§ 5. Vorkommen der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 f u = 0$ in der Minimalflächentheorie.

Ein mathematisches Problem, welches als Hülfsmittel die Integration einer speciellen Differentialgleichung von der Form $\Delta u + k^2 f . u = 0$, nämlich derjenigen, in welcher $k^2 f = \frac{8}{(1 + x^2 + y^2)^2}$ ist, erfordert, ist die Untersuchung der zweiten Variation des Flächeninhalts von Minimalflächenstücken, ein Problem, welches von *H. A. Schwarz* in seiner Festschrift: „Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung" (Helsingfors, 1885) behandelt worden ist*).

Daselbst wird gezeigt, dass ein Minimalflächenstück unter allen von derselben Randlinie begrenzten und ihm unendlich benachbarten Flächenstücken *dann* wirklich den kleinsten Flächeninhalt besitzt, wenn es möglich ist, auf beiden Seiten des gegebenen Flächenstückes eine dasselbe enthaltende Schaar von Minimalflächenstücken so zu construiren, dass der Abstand je zweier unendlich benachbarter Flächenstücke der Schaar überall eine unendlich kleine Grösse derselben Ordnung ist, also insbesondere nirgends verschwindet.

Man kann nun nach *Schwarz* zu einem gegebenen Minimalflächenstücke immer beiderseits eine Schaar benachbarter construiren, von denen je zwei unendlich benachbarte einen Abstand besitzen, welcher durch das Product einer unendlich kleinen Constante ε und einer gewissen Function ψ gegeben ist; für diese Function ψ ergiebt sich aus der Minimalflächentheorie die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{8 \psi}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2} = 0,$$

worin ξ, η die rechtwinkligen Coordinaten in der Ebene bezeichnen, auf welche das *sphärische Bild* des gegebenen Mini-

*) Vergl. auch: „Gesammelte mathematische Abhandlungen von H. A. Schwarz", Berlin, 1890. 1. Bd., p. 236—40.

malflächenstückes *stereographisch projicirt* ist. Die Frage, ob das Minimalflächenstück wirklich *ein Minimum des Flächeninhalts bei festgehaltener Begrenzung* besitzt, ist demnach auf die andere zurückgeführt, ob es eine Lösung der vorstehenden partiellen Differentialgleichung giebt, die in dem Bereiche T, welcher dem gegebenen Minimalflächenstücke entspricht, sich regulär verhält und nur reelle, überall (auch noch auf der Begrenzung) *von Null verschiedene* Werthe annimmt.

Dass sich für ψ gerade die obige Differentialgleichung ergiebt, welche, wie wir später (in II, § 7, b) sehen werden, für die gewöhnlichen *Kugelflächenfunctionen ersten Grades* gilt*), hat seinen Grund darin, dass sich einerseits die Function ψ nach der Theorie der Minimalflächen in bestimmter Weise durch eine willkürliche Function des complexen Argumentes $\xi + i\eta$ und die conjugirte, oder also durch ein beliebiges logarithmisches Potential in der ΞH-Ebene ausdrückt, und dass andererseits, wie *F. Klein* in seiner Vorlesung über „Lamé'sche Functionen" (Winter 1889/90) bemerkt hat, der aus einem beliebigen logarithmischen Potential V gebildete Ausdruck

$$r^{2m+1}\frac{\partial^m}{\partial h_1 \ldots \partial h_m}\left\{\frac{V\left(\frac{x}{z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{y}{z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{r}\right\},$$

worin $\frac{\partial^m}{\partial h_1 \ldots \partial h_m}$ eine m-malige Differentiation nach irgend welchen Richtungen bedeutet, und *welcher für $m = 1$ mit dem erwähnten für die Function ψ identisch wird, eine Kugelfunction m^{ten} Grades* im Raume von drei Dimensionen, oder wenn man nach Ausführung der Differentiationen r constant setzt, eine Kugelflächenfunction m^{ten} Grades darstellt**). Letzteres ergiebt sich auf folgende Weise. Setzt man $k^2 = 0$ oder

*) Für die Kugelflächenfunctionen m^{ten} Grades tritt $4m(m+1)$ an Stelle des Coefficienten 8.

**) *Maxwell* hat gezeigt (Elektricität und Magnetismus, Uebers. v. Weinstein, I. p. 194—196), dass obige Formel, wenn man von dem *speciellen* logarithmischen Potential $V =$ Const. ausgeht, die allgemeinste *rationale ganze („harmonische")* Kugelflächenfunction liefert.

$m = 0$, so sieht man aus der Differentialgleichung, dass man eine Kugelflächenfunction 0ten Grades unmittelbar dadurch erhält, *dass man ein beliebiges logarithmisches Potential V in der* ΞH- *oder XY-Ebene durch stereographische Projection auf die Kugelfläche überträgt.* Diese Kugelflächenfunction $V\left(\frac{x}{z-r}, \frac{y}{z-r}\right)$ lässt sich nun, indem man für r setzt $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, in eine Function der Verhältnisse $x:y:z$, d. h. eine homogene Function nullten Grades der x, y, z, verwandeln und stellt dann eine *räumliche Kugelfunction* 0ten *Grades* dar, genügt also den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{und} \quad x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen ergiebt nun eine einfache Rechnung, dass der Ausdruck $r^{2m+1}\frac{\partial^m}{\partial x^\mu\, \partial y^\nu\, \partial z^\pi}\left(\frac{V}{r}\right)$, wo $\mu+\nu+\pi = m$ ist, und folglich auch $r^{2m+1}\frac{\partial^m}{\partial h_1 \ldots \partial h_m}\left(\frac{V}{r}\right)$ der Differentialgleichung des Potentials genügt. Da letzterer Ausdruck nun eine homogene Function m^{ten} Grades von x, y, z ist, so ist er also in der That eine räumliche Kugelfunction m^{ten} Grades.

Näher auf diesen interessanten Zusammenhang zwischen der Theorie der Kugelfunctionen und derjenigen des logarithmischen Potentials einzugehen, würde nicht den Zwecken der vorliegenden Darstellung entsprechen.

(Auf diesen Zusammenhang bezieht sich auch eine Arbeit von *W. F. Donkin*, Phil. Transactions Vol. 147, p. 43—57, 1857, welche mir erst bei der Correctur bekannt wurde.)

II. Theil.

Von den ausgezeichneten Lösungen.

A. Allgemeine Theorie der ausgezeichneten Lösungen.

§ 1. Grenzbedingungen, welche bei den physikalischen Problemen vorkommen. — Definition der ausgezeichneten Lösungen.

Es wurde schon erwähnt, dass bei den meisten der physikalischen Probleme, welche auf die Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 f \, . \, u = 0$$

und verwandte führen, nämlich bei allen im I. Theile unter A. § 1 angeführten Aufgaben, sofern nicht die Abhängigkeit von der Zeit oder von einer Coordinate von vornherein gegeben ist (was z. B. bei erzwungenen Schwingungen der Fall ist), der constante Factor k^2 zunächst *unbestimmt* bleibt. In diesem II. Theile soll ausschliesslich von der Integration unserer Differentialgleichung unter denjenigen Bedingungen, wie sie bei den physikalischen Problemen dieser Art gegeben sind, gehandelt werden. Es sind daher vorerst diese Bedingungen selbst in's Auge zu fassen, wobei immer kurz von der Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 f \, . \, u = 0$$

gesprochen werden soll, da die zulässige Verallgemeinerung aus den Entwickelungen des I. Theiles hinreichend ersichtlich ist.

Die erste Bedingung ist immer die, dass die Lösung u in dem gegebenen ein-, zwei- oder drei-dimensionalen Gebiete, für welches die Differentialgleichung zu integriren ist, *überall eindeutig, endlich und nebst ihren ersten Differential-*

quotienten stetig sein soll; dies wird in allen Fällen durch die physikalische Bedeutung von u erfordert. Ausserdem muss aber *u an der Begrenzung des Gebietes* gewissen Bedingungen genügen, welche nun näher zu erörtern sind.

Bei einer *Saite mit festen Endpunkten* oder einer *in einen starren Rahmen gespannten Membran* muss an der Begrenzung die Verrückung verschwinden, folglich

$$\bar{u} = 0$$

sein*). Ebenso muss bei einer schwingenden *Luftplatte mit offenem Rande* an dem letzteren die Verdichtung, mithin auch u, gleich Null sein, wenigstens sehr annähernd.

Bei den in I, § 1. **d.** und **e.** erwähnten Poblemen der Wärmeströmung tritt die Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ auf, wenn die Oberfläche des leitenden Körpers *auf der Temperatur* 0 *erhalten* wird; in ähnlicher Weise lässt sich dieselbe bei Problemen der stationären elektrischen Strömung, welche auf die in § 1. **e.** erwähnten Potentialaufgaben führen, interpretiren.

Die zweite einfache und häufig vorkommende Grenzbedingung ist die, *dass der erste Differentialquotient von u nach der Normale der Oberfläche bezw. des Randes verschwinden soll:* $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$. Dieselbe gilt bei den Schwingungen von *Luftmassen, die von völlig starren Wänden eingeschlossen sind,* bei der *Wärmeströmung*, wenn die Oberfläche *vor Wärmeabgabe nach aussen geschützt* ist, bei der *elektrischen Strömung* in cylindrischen Metallkörpern (cf. die Potentialaufgaben I, § 1. **e**), sowie auch bei den unter I, § 1. **f.** besprochenen *Flüssigkeitsschwingungen*; sie bedeutet in allen diesen Fällen, *dass die Bewegungscomponente senkrecht zur Begrenzung verschwinden muss.*

Beide Grenzbedingungen, $\bar{u} = 0$ und $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$, können als specielle Fälle der allgemeineren

$$\alpha \bar{u} + \beta \frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{oder} \quad h \bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} = 0 \tag{9}$$

*) Die Werthe der Function u und ihrer Differentialquotienten in Punkten der Begrenzung sollen immer durch einen horizontalen Strich ausgezeichnet werden.

aufgefasst werden, worin α, β bezw. h gegebene Constanten oder auch längs der Begrenzung gegebene Functionen sind und σ eine für jeden Punkt der Begrenzung gegebene Richtung bezeichnet; denn man erhält die erste oder die zweite, jenachdem man β oder α gleich Null setzt, falls zugleich σ überall mit der Normale n zusammenfällt.

Für das Folgende sei noch festgesetzt, dass mit n immer die Richtung der *nach aussen* gerichteten Normale bezeichnet werden soll.

Man kann die allgemeine Grenzbedingung auch schreiben

$$(9') \qquad \alpha\bar{u} + \gamma_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \gamma_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0,$$

wo dann $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ gleich den Producten aus β und den Richtungscosinus von σ sind.

Dieselbe findet eine anschauliche Interpretation nur bei den Wärmeproblemen, wo sie für solche Begrenzungstheile gilt, *welche durch Strahlung oder Leitung Wärme an ein umgebendes Medium von der constanten Temperatur* 0 *abgeben* und der Kürze wegen späterhin als *„frei ausstrahlende“* bezeichnet werden sollen. Hat die Differentialgleichung der Wärmeleitung die auf S. 13 angegebene allgemeine Form, so wird nämlich die Bedingung, dass jedem Element der Begrenzung während des Zeitelementes dt ebensoviel Wärme aus dem Innern zuströmen muss, als es nach aussen abgiebt, durch die Gleichung ausgedrückt:

$$(9'') \qquad \begin{aligned} &\left(\varkappa_{11} \cos(nx) + \varkappa_{12} \cos(ny) + \varkappa_{13} \cos(nz)\right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \\ &+ \left(\varkappa_{12} \cos(nx) + \varkappa_{22} \cos(ny) + \varkappa_{23} \cos(nz)\right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ &+ \left(\varkappa_{13} \cos(nx) + \varkappa_{23} \cos(ny) + \varkappa_{33} \cos(nz)\right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ &+ \alpha\bar{u} = 0, \end{aligned}$$

worin α das Ausstrahlungsvermögen ist. Sowohl dieses, als die Coefficienten von $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$, also $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$, können variabel sein unter der Beschränkung, dass sie alle *positiv* sein müssen; denn negatives Leitungs- und Ausstrahlungsvermögen sind physikalisch unmöglich. Bei isotropen Körpern heisst

die Gleichung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$, und die Grösse h bedeutet dann das Verhältniss der äusseren Wärmeleitungsfähigkeit oder des Ausstrahlungsvermögens zur inneren Leitungsfähigkeit. Bei der schwingenden *Saite und Membran* stellt sich die Grenzbedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ ein, wenn man annimmt, dass die Enden bezw. der Rahmen nicht absolut fest sind, sondern der Bewegung der angrenzenden Theile *ein wenig nachgeben können* und dabei durch Kräfte, welche der Verrückung aus der Gleichgewichtslage proportional sind, also etwa wie Federn wirken, zurückgehalten werden. Diese Kräfte sind dann durch $\mu\bar{w}$, die wirksamen Spannungscomponenten durch $+ p_n \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}$, wo p_n die Spannung in der Richtung n bedeutet, gegeben, und wenn m die Masse der Endpunkte der Saite bezw. der Längeneinheit des Rahmens ist, so gilt für die Punkte der Begrenzung die Bewegungsgleichung

$$m \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = \mu\bar{w} + p_n \frac{\partial \bar{w}}{\partial n},$$

welche nach Einsetzung von $w = u \sin \frac{t - t'}{\tau}$ für u die Grenzbedingung

$$\left(\mu - \frac{m}{\tau^2}\right) \bar{u} + p_n \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$$

ergiebt; hier ist also $h = \frac{\mu - \frac{m}{\tau^2}}{p_n}$ und kann im Gegensatz zu den Wärmeproblemen auch *negativ* sein. Im Falle variabeler Spannung erhielte man wieder die allgemeinste Grenzbedingung $\alpha\bar{u} + \beta \frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} = 0$.

In ähnlicher Weise liesse sich das Vorkommen der Grenzbedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ bei den Luftschwingungen denken; indessen wäre ihre Deutung mindestens ebensowenig den wirklichen Verhältnissen entsprechend, wie im vorhergehenden Falle.

Ausser den unter der Form 9) enthaltenen Grenzbedingungen bietet sich bei manchen Problemen noch eine andere

dar, welche man als die *Grenzbedingung der Periodicität* bezeichnen kann, und welche in der Forderung besteht, *dass an correspondirenden Stellen zweier Begrenzungsstücke eines Bereiches, die mit einander zur Deckung gebracht werden können, die Werthe von u direct, diejenigen von $\frac{\partial u}{\partial n}$ entgegengesetzt gleich sein sollen.* Wir werden diese Grenzbedingung nur bei solchen speciellen Fällen berücksichtigen, wo sie eine *physikalische* Bedeutung hat, obgleich sie mathematisch wohl von allgemeinerem Interesse wäre.

Obwohl bei einzelnen physikalischen Problemen, wie bei den Transversalschwingungen elastischer Platten, complicirtere Grenzbedingungen auftreten können, so wollen wir uns doch auf die soeben besprochenen beschränken, um die Einheitlichkeit zu wahren. Dabei sei noch einmal hervorgehoben, dass h alle reellen Werthe annehmen kann, während die Aenderung der Richtung σ durch die Coefficienten der für das Innere des Gebietes geltenden Differentialgleichung schon bestimmt ist.

Die Aufgabe, auf welche man bei den unter I. A. § 1 erwähnten physikalischen Problemen geführt wird, ist dann stets diese: *Eine von 0 verschiedene Lösung der partiellen Differentialgleichung*

$$\Delta u + k^2 f \,.\, u = 0,$$

(bezw. einer verwandten von der Form (2) oder (3)), *zu finden, welche innerhalb des gegebenen Bereiches endlich, stetig und eindeutig ist* (sich „regulär“ verhält) *und an der ganzen Begrenzung der Gleichung genügt:*

$$h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} = 0\,.$$

Eine solche Lösung existirt nun im Allgemeinen, d. h. für einen beliebig angenommenen Werth von k^2, *nicht*, was z. B. die Annahme $k^2 = 0$, durch welche man die Potentialgleichung erhält, sofort erkennen lässt; *es giebt vielmehr nur ganz bestimmte Werthe von k^2, für welche eine Lösung von den verlangten Eigenschaften möglich ist.* Diese speciellen Werthe von k^2 mögen die *ausgezeichneten Werthe*, die ihnen ent-

sprechenden Lösungen u *ausgezeichnete Lösungen* genannt werden, und mit ihnen wollen wir uns in diesem Theile der vorliegenden Schrift ausschliesslich beschäftigen. Die Voranstellung der ausgezeichneten Lösungen ist berechtigt einmal, weil sie sich in der Physik immer in erster Linie darbieten, zweitens, weil ihre Kenntniss für die Untersuchung allgemeiner Integrale unserer Differentialgleichung erforderlich ist.

§ 2. **Betrachtungen zur Begründung der Existenz der ausgezeichneten Lösungen.**

Die erste Frage, die sich uns aufdrängt, ist nun die: woher wissen wir, dass überhaupt solche ausgezeichneten Lösungen existiren? Hier tritt uns sogleich eine noch ungelöste Schwierigkeit entgegen; denn der mathematische Existenzbeweis ist bisher für beliebige Form der Begrenzung nur in einem beschränkten Falle und auch da nur für *eine* ausgezeichnete Lösung gelungen (cf. § 10 dieses Theiles). Vorläufig müssen wir uns daher an die *physikalische Erfahrung* halten, welche uns lehrt, dass Saiten, Membranen und eingeschlossene Luftmassen einer Reihe von *freien Schwingungen*, entsprechend ihren *Eigentönen*, deren Schwingungszahlen den ausgezeichneten Werthen k proportional sind, fähig sind, und dass die Grössen k dabei eine Reihe *discreter* Werthe bilden, wenigstens wenn man von gewissen später zu erwähnenden Grenzfällen absieht. Obwohl man experimentell immer nur eine endliche Anzahl von Eigentönen nachweisen kann, nimmt man an, dass jene Reihe der ausgezeichneten Werthe *unbegrenzt* ist, weil man dies für eine Anzahl mathematisch lösbarer Fälle beweisen und dennoch in diesen, wie in den nicht lösbaren Fällen, die Eigenschwingungen nur bis zu einer gewissen oberen Grenze der Schwingungszahl wahrnehmen kann.

Natürlich können diese aus der Erfahrung gezogenen Schlüsse das in Frage stehende Existenztheorem höchstens mehr oder weniger wahrscheinlich machen, und eine mathematische Begründung ist durchaus nothwendig. Auf die Ver-

suche, welche in dieser Richtung von *H. Weber* und *Poincaré* gemacht worden sind, wird an einer späteren Stelle dieses Theiles eingegangen werden.

Dagegen soll jetzt zunächst gezeigt werden, wie man durch eine Art von Grenzübergang zu dem Existenztheorem gelangen kann, nämlich *indem man von der Theorie der unendlich kleinen Schwingungen eines mechanischen Systems von n Graden der Freiheit ausgeht.* Dieser Weg, welcher, mathematisch ausgedrückt, darin besteht, dass man die Lösungen einer *partiellen* Differentialgleichung durch Grenzübergang aus den Integralen einer grossen Zahl *gewöhnlicher* Differentialgleichungen ableitet, ist bekanntlich von *Lagrange* sowie schon früher (um 1730) von *Johann* und *Daniel Bernoulli* (Comment. Acad. Petropolitanae III und VI) bei der Behandlung des classischen Problems der schwingenden Saite eingeschlagen, dann aber, wie es scheint, auf längere Zeit ganz verlassen worden, vielleicht deshalb, weil die Untersuchungen der grossen französischen Mathematiker und Physiker (z. B. *Poisson, Cauchy, Lamé*) über partielle Differentialgleichungen seit *Fourier* immer an Probleme der *Wärmeleitung* anknüpften. Erst bei den neueren englischen Physikern, wie *W. Thomson, Routh, Lord Rayleigh,* findet sich derselbe Gedankengang wieder, und der letztere hat eigentlich seine ganze „Theorie des Schalles“ darauf begründet. Man könnte daher diese Erschliessung der Existenz einer unendlichen Reihe von ausgezeichneten Lösungen durch einen Grenzübergang mit einigem Recht als *„Rayleigh'sches Princip“* bezeichnen. Als wirklicher *Existenzbeweis* könnte das Rayleigh'sche Princip erst gelten, wenn die Zulässigkeit des Grenzüberganges zu $n = \infty$ mathematisch bewiesen wäre, was zu thun *Poincaré* am Schlusse seiner im „American Journal of Mathematics“ Vol. XII, No. 3 publicirten Abhandlung: „Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique“ in Aussicht gestellt hat. Uebrigens ist es auch unabhängig davon nützlich, die Betrachtung der Schwingungen von Systemen von n Graden der Freiheit vorauszuschicken, weil sie einiges Licht auf die Natur der Eigenschwingungen überhaupt wirft. Die in Rede stehende

Theorie ist seit *Lagrange* vielfach behandelt worden, wie schon gesagt besonders von englischen Physikern. Die umfassendsten Darstellungen finden sich im zweiten Theile der „Dynamics of rigid bodies" von *Routh**) und in den Capiteln III—V von *Lord Rayleigh's* Theorie des Schalles; ausserdem haben zahlreiche Mathematiker, besonders *Weierstrass*, gelegentlich anderer Untersuchungen wichtige Beiträge dazu geliefert**). Wenn wir im Folgenden auf diesen Gegenstand, obwohl er der Mehrzahl der Leser im Wesentlichen bekannt sein wird, ausführlich eingehen, so ist dies wohl durch den oben angegebenen Grund zu rechtfertigen.

§ 3. Problem der kleinen Schwingungen eines Systems von n Graden der Freiheit um eine stabile Gleichgewichtslage.

Ein System von n Graden der Freiheit sei durch die unabhängigen Coordinaten (im weiteren Sinne) $q_1 \dots q_i \dots q_n$ bestimmt und befinde sich in einer stabilen Gleichgewichtslage, wenn die letzteren sämmtlich gleich Null sind. Es handelt sich um die Untersuchung der Bewegung, welche eintritt, wenn das System unendlich wenig aus dieser Gleichgewichtslage herausgebracht worden ist; dabei brauchen $q_1 \dots q_n$ nicht unendlich klein zu sein, da die ursprünglichen unendlich kleinen Aenderungen der Coordinaten ja alle mit einem beliebig grossen constanten Factor multiplicirt werden können. Um die Bewegungsgleichungen nach Lagrange aufzustellen, sind die Ausdrücke für die lebendige Kraft T und die potentielle Energie V, welche letztere theils von inneren, theils von äusseren Kräften herrühren kann, zu bilden. Die lebendige Kraft ist bekanntlich gegeben durch eine homogene Function zweiten Grades von $\frac{dq_1}{dt}, \dots \frac{dq_n}{dt}$ oder $q_1' \dots q_n'$, also

$$T = \sum_i \sum_k b_{ik}\, q_i' q_k',$$

*) E. J. Routh, Dynamics of rigid bodies, London 1884. (2.) Chap. II, VI, VII, IX.

**) Vgl. auch *Baltzer*, Theorie und Anwendung der Determinanten, 4. Aufl. 1875; § 14, S. 190—193.

wo die b_{ik} (in erster Annäherung) Constanten sind. Aus der Natur von T folgt, dass die vorstehende quadratische Form *definit* ist, d. h. für alle Werthe von $q_i' \ldots q_n'$ dasselbe, hier *positive* Zeichen besitzt. Das Potential V muss für

$$q_1 = q_2 = \ldots q_n = 0$$

ein Minimum sein, da die Ruhelage *stabil* sein soll. Jener Minimumwerth kann ohne Beschränkung $= 0$ gesetzt werden, folglich ist V, wenn wir besondere Fälle ausschliessen, in erster Annäherung eine quadratische Form der Coordinaten selbst:

$$V = \sum_i \sum_k a_{ik}\, q_i\, q_k;$$

dieselbe ist *ebenfalls definit und positiv*, weil nach der Voraussetzung der Stabilität V für alle Werthe von $q_1 \ldots q_n$ positiv sein muss.

Die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_i} = 0$$

heissen also hier:

$$\sum_1^n{}^k (b_{ik}\, q_k'' + a_{ik}\, q_k) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n).$$

Dies sind n lineare homogene gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Coordinaten q. Um dieselben zu integriren, setzt man

$$q_k = A_k e^{\mu t}$$

und erhält dann n lineare homogene Gleichungen:

$$\sum_1^n{}^k (a_{ik} + \mu^2 b_{ik})\, A_k = 0$$

für die n Constanten A_k. Sollen sich letztere bestimmen lassen, so muss die Determinante dieser Gleichungen verschwinden, also

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} + \mu^2 b_{11} & a_{12} + \mu^2 b_{12} \ldots\ldots & a_{1n} + \mu^2 b_{1n} \\ a_{12} + \mu^2 b_{12} & a_{22} + \mu^2 b_{22} \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} + \mu^2 b_{1n} & \ldots\ldots & a_{nn} + \mu^2 b_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

sein; dies ist eine *Gleichung* n^{ten} *Grades für* μ^2, von deren Wurzeln der Charakter der Lösung wesentlich abhängt. Sind die Wurzeln $\mu_1^2 \ldots \mu_n^2$ alle von einander verschieden, wie wir hier zunächst annehmen, so heisst die vollständige Lösung der Bewegungsgleichungen:

$$q_k = \sum_1^n {}^i (A_{ki} e^{\mu_i t} + A'_{ki} e^{-\mu_i t}),$$

wobei die Verhältnisse $A_{1i} : A_{2i} \ldots : A_{ki} \ldots : A_{ni}$ völlig bestimmt und nur die n Glieder *einer* Reihe $A_{k1} \ldots A_{kn}$ willkürlich sind; denn es ist

$$\begin{aligned} A_{1i} : A_{2i} : \cdots : A_{ni} &= A'_{1i} : A'_{2i} \cdots : A'_{ni} \\ &= D_{11}(\mu_i^2) : D_{12}(\mu_i^2) \cdots : D_{1n}(\mu_i^2), \end{aligned}$$

wo die $D_{\alpha\beta}$ die Unterdeterminanten von D sind; statt derjenigen der ersten Zeile könnte man natürlich die jeder anderen nehmen. Hinsichtlich der Wurzeln μ_i^2 der *„determinirenden Gleichung"* $D(\mu^2) = 0$ folgt nun aus den über die quadratischen Formen

$$\sum^i \sum^k a_{ik} x_i x_k \quad \text{und} \quad \sum^k b_{ik} x_i x_k$$

gemachten Voraussetzungen, dass sie sämmtlich *reell* und *negativ* sind. Die Realität folgt schon allein daraus, dass die zweite obiger Formen definit ist, und wird z. B. bei *Routh* (l. c. p. 36—39) zunächst unter der Annahme, dass alle Wurzeln unter einander verschieden sind, in der Weise bewiesen, dass auf die Reihe sämmtlicher Unterdeterminanten der Hauptdiagonale von D (D selbst inclusive) der Sturm'sche Satz über die Beziehung zwischen der Anzahl der Wurzeln von D und der Zeichenwechsel in jener Reihe angewandt wird. Nimmt man die Voraussetzung, dass die erste Form ebenfalls definit ist, hinzu, so ergiebt dieses Beweisverfahren auch, dass alle Wurzeln zwischen $-\infty$ und 0 liegen. An einer anderen Stelle (in Cap. VII. des zweiten Theiles) verfährt *Routh* folgendermassen. In die Bewegungsgleichungen wird das specielle Lösungssystem

$$\begin{aligned} q_1 = A_{1i} e^{\mu_i t} + A'_{1i} e^{-\mu_i t}, \quad q_2 = A_{2i} e^{\mu_i t} + A'_{2i} e^{-\mu_i t} \cdots \\ q_n = A_{ni} e^{\mu_i t} + A'_{ni} e^{-\mu_i t} \end{aligned}$$

eingesetzt; die hierdurch erhaltenen n Gleichungen

$$(a_{11} + \mu_i^2 b_{11})(A_{1i} + A'_{1i}) + (a_{12} + \mu_i^2 b_{12})(A_{2i} + A'_{2i}) + \cdots = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(a_{n1} + \mu_i^2 b_{n1})(A_{1i} + A'_{1i}) + (a_{n2} + \mu_i^2 b_{n2})(A_{2i} + A'_{2i}) + \cdots = 0$$

werden der Reihe nach mit $(A_{1i} + A'_{1i}) \ldots (A_{ni} + A'_{ni})$ multiplicirt und dann addirt. Hierdurch erhält man, wenn man setzt

$$\sum^i \sum^k a_{ik}\, x_i x_k = \varphi(x_i \ldots x_n), \quad \sum^i \sum^k b_{ik}\, x_i x_k = \psi(x_1 \ldots x_n),$$

die Gleichung

$$\mu_i^2 \psi\big((A_{1i} + A'_{1i}), \ldots (A_{ni} + A'_{ni})\big)$$
$$+ \varphi\big((A_{1i} + A'_{1i}), \ldots (A_{ni} + A'_{ni})\big) = 0.$$

Da nun nach der Voraussetzung φ und ψ für reelle Werthe der $x_1 \ldots x_n$ sicher > 0 sind, und $A_{1i} + A'_{1i}, \ldots A_{ni} + A'_{ni}$ nothwendig reell sein müssen, damit die Lösungen für $q_1 \ldots q_n$ reell sind, so folgt aus dieser Gleichung, dass μ_i^2 *negativ* $= -\lambda_i$, also *alle* μ_i *rein imaginär* sind. Demnach hat das vollständige Lösungssystem die Form

$$q_1 = B_{11}\, D_{11}(-\lambda_1) \cos \sqrt{\lambda_1}\,(t - t_1) + \cdots + B_{1n}\, D_{11}(-\lambda_n) \cos \sqrt{\lambda_n}\,(t - t_n),$$
$$q_2 = B_{11}\, D_{12}(-\lambda_1) \cos \sqrt{\lambda_1}\,(t - t_1) + \cdots + B_{1n}\, D_{12}(-\lambda_n) \cos \sqrt{\lambda_n}\,(t - t_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q_n = B_{11}\, D_{1n}(-\lambda_1) \cos \sqrt{\lambda_1}\,(t - t_1) + \cdots + B_{1n}\, D_{1n}(-\lambda_n) \cos \sqrt{\lambda_n}\,(t - t_n).$$

(Bei den willkürlichen Constanten B kann der erste Index fortgelassen werden.)

Diese Formeln enthalten folgenden fundamentalen Satz: *„Die allgemeinste (unendlich kleine) Bewegung eines sich selbst überlassenen mechanischen Systems von n Graden der Freiheit ist bei Abwesenheit von Reibungs- und ähnlichen Kräften eine Ueberlagerung von n einfachen harmonischen Schwingungen mit völlig bestimmten, nur von der Natur des Systems abhängigen Perioden, aber beliebigen Phasen und Amplituden.“*

Wir haben diesen Satz zunächst nur unter der Voraussetzung lauter *verschiedener* Wurzeln der Gleichung $D(-\lambda) = 0$ abgeleitet, er verliert seine Gültigkeit aber auch nicht im

Falle *mehrfacher* Wurzeln, wie wir weiter unten sehen werden. Er liefert bei der Uebertragung auf den Grenzfall $n = \infty$, sofern man diese als richtig annimmt, das Rayleigh'sche Princip.

Es ist nun von grosser Wichtigkeit, dass man statt der allgemeinen Coordinaten $q_1 \ldots q_n$ neue $r_1 \ldots r_n$ von der Beschaffenheit einführen kann, dass man durch Nullsetzen aller dieser Coordinaten bis auf *eine* je eine einzelne Fundamentalschwingung (Normalschwingung, Eigenschwingung) des Systems erhält. Die Einführung dieser sogenannten *Normalcoordinaten* scheint Gemeingut der englischen Physiker zu sein und ist am ausführlichsten in *Rayleigh's* Theorie des Schalles, Cap. IV, durchgeführt. Die genannte Eigenthümlichkeit der Normalcoordinaten ist nothwendig mit der anderen verbunden, dass sich V und T durch die Normalcoordinaten bezw. ihre ersten Differentialquotienten nach der Zeit *als Summen von Quadraten* ausdrücken; denn sonst würden die Normalcoordinaten in den Bewegungsgleichungen nicht getrennt vorkommen. Durch diese Erwägung ist die Einführung der Normalcoordinaten auf die Aufgabe,

$$V = \sum^i \sum^k a_{ik} q_i q_k \quad \text{und} \quad T = \sum^i \sum^k b_{ik} q_i' q_k'$$

gleichzeitig auf Quadratsummen zu reduciren, zurückgeführt und damit das Problem der kleinen Schwingungen bei n Graden der Freiheit in engste Beziehung zur *Theorie der quadratischen Formen* gebracht. Denn die Reduction von T ist gelungen, sobald man sie für die quadratische Form $\psi = \sum^i \sum^k b_{ik} q_i q_k$, worin q_i, q_k statt q_i', q_k' stehen, ausgeführt hat; es folgt dies einfach daraus, dass die neuen Coordinaten mit den alten durch *lineare* Gleichungen mit constanten Coefficienten verbunden sein müssen, also zu setzen ist:

$$q_i = \sum_1^n {}^k \beta_{ik} r_k \quad (i = 1, 2 \ldots n).$$

Dass die Transformation von ψ allein auf die Form

$\sum r_i^2$ möglich ist, bedarf keiner weiteren Erörterung; es handelt sich aber darum, durch *dieselbe* Substitution

$$q_i = \sum^k \beta_{ik} r_k$$

zugleich $\varphi = \sum^i \sum^k a_{ik} q_i q_k$ auf die Form $\sum^i \lambda_i r_i^2$ zu bringen. Dieses Problem ist nun genau ebenso zu lösen, wie die Bestimmung der *Maxima und Minima der Function* $\varphi(q_1 \ldots q_n)$ bei der Nebenbedingung, dass der Werth von $\psi(q_1 \ldots q_n)$ ungeändert bleibt, oder wie diejenige der Maxima und Minima des Quotienten $\varphi : \psi$, d. h. also wie das für den Raum von n Dimensionen *verallgemeinerte Hauptaxenproblem der Flächen zweiten Grades*. Die Verhältnisse der Variabeln q_i, für welche diese relativen Maxima und Minima eintreten, sind aus den n linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda b_{11}) q_1 + \cdots + (a_{1n} - \lambda b_{1n}) q_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{1n} - \lambda b_{1n}) q_1 + \ldots + (a_{nn} - \lambda b_{nn}) q_n &= 0 \end{aligned}$$

zu bestimmen, in welchen λ einen Lagrange'schen Multiplicator bezeichnet. Die zulässigen Werthe des letzteren sind die *Wurzeln* $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ *der Determinantengleichung*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & \ldots\ldots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & \ldots\ldots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

und zugleich, wie man sich leicht überzeugt, gerade *die Coefficienten von* $r_1^2 \ldots r_n^2$ *in der transformirten Form* φ, *also auch die Minima bezw. Maxima von* $\frac{\varphi}{\psi}$ *selbst.* Die vorstehende Determinante ist aber genau die oben betrachtete Determinante $D(-\lambda)$ oder $D(\mu^2)$, auf welche die directe Integration der Bewegungsgleichungen führte.

Da jetzt

$$V = \sum^i \lambda_i r_i^2, \quad T_1 = \sum^i r_i'^2$$

geworden ist, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$r_i'' + \lambda_i r_i = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

und es ergiebt sich

$$r_i = B_i \cos \sqrt{\lambda_i}(t - t_i).$$

Die Normalcoordinaten sind also in der That einfache harmonische Functionen der Zeit, multiplicirt mit willkürlichen Constanten.

Vergleicht man das jetzige Resultat mit dem früheren, so sieht man sofort, dass die Substitutionscoefficienten $\beta_{1i} \ldots \beta_{ki} \ldots \beta_{ni}$ proportional sind den *Unterdeterminanten* $D_{\alpha 1}(-\lambda_i) \ldots D_{\alpha k}(-\lambda_i) \ldots D_{\alpha n}(-\lambda_i)$, wo α eine beliebige der Zahlen $1 \ldots n$ ist. Besonders wichtig ist der Fall, wo ψ von vornherein in der Normalform $\sum^i q_i^2$ (also T in der Form $\sum^i q_i'^2$) gegeben ist. Dann müssen, damit bei der Substitution

$$q_i = \sum^k \beta_{ik} r_k$$

diese Form erhalten bleibt, die Coefficienten den Bedingungen

$$\sum_1^n {}^k \beta_{ik}^2 = 1, \quad \sum_1^n {}^k \beta_{ik}\beta_{jk} = 0 \quad \left(\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n; \; i \gtrless j\Big)$$

genügen, d. h. die Substitution muss eine *orthogonale* sein; sie ergiebt rückwärts aufgelöst:

$$r_k = \sum^i \beta_{ik} q_i.$$

Im Hinblick auf später sei bemerkt, dass diese letzteren Gleichungen eine einfache Bestimmung der willkürlichen Constanten B_i, t_i aus gegebenen Anfangswerthen von q_i, q_i' ermöglichen.

Im allgemeinen Falle sind die Gleichungen, welche den soeben aufgestellten *Orthogonalitätsbedingungen* entsprechen, folgende. Bezeichnet man wie früher

$$a_{11} q_1^2 + a_{22} q_2^2 \cdots a_{nn} q_n^2 + 2 a_{12} q_1 q_2 + \cdots$$
$$b_{11} q_1^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + 2 b_{12} q_1 q_2 + \cdots$$

mit $\varphi(q_1 \ldots q_n)$, bezw. $\psi(q_1 \ldots q_n)$, dagegen

$$a_{11} q_1 p_1 + a_{22} q_2 p_2 \cdots + 2 a_{12}(q_1 p_2 + q_2 p_1) + \cdots,$$

wo $p_1 \ldots p_n$ eine zweite Reihe von Variabeln ist, mit

$$\varphi(q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n)$$

und analog

$b_{11}q_1p_1 \cdots + 2b_{12}(q_1p_2 + q_2p_1) + \cdots$ mit $\psi(q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n)$,

so gilt, wie sich bei wirklicher Durchführung der Transformation von φ und ψ auf ihre Normalformen leicht ergiebt,

$$\varphi(\beta_{1h} \ldots \beta_{nh}, \quad \beta_{1k} \ldots \beta_{nk}) = 0,$$
$$\psi(\beta_{1h} \ldots \beta_{nh}, \quad \beta_{1k} \ldots \beta_{nk}) = 0,$$

falls h, k irgend zwei verschiedene von den Zahlen 1 bis n sind, ferner:

$$\varphi(\beta_{1i} \ldots \beta_{ni}) = \lambda_i, \quad \psi(\beta_{1i} \ldots \beta_{ni}) = 1 \quad \text{für} \quad i = 1 \ldots n.$$

Die vorletzte Gleichung wurde schon oben bei dem Beweis, dass alle λ_i positiv (oder alle μ_i^2 negativ) sind, auf andere Weise abgeleitet. Die beiden letzten Gleichungen enthalten den physikalischen Satz, *dass die mittleren Werthe der kinetischen und potentiellen Energie während der Dauer einer Fundamentalschwingung, falls diese letztere allein vorhanden ist, einander gleich sind*; denn jene Mittelwerthe sind in diesem Falle durch $\frac{1}{2}\, r_i^2 \lambda_i \psi(\beta_{1i} \ldots \beta_{ni})$ bezw. $\frac{1}{2}\, r_i^2 \varphi(\beta_{1i} \ldots \beta_{ni})$ gegeben.

Mit Hülfe der soeben angegebenen Relationen zwischen den Coefficienten β ergiebt sich ferner leicht *nachstehende Umkehrung der Substitution* $q_i = \sum^k \beta_{ik} r_k$. Es ist:

$$r_k = \psi(q_1 \ldots q_n; \quad \beta_{1k} \ldots \beta_{nk})$$

oder

$$= \frac{1}{\lambda_k} \cdot \varphi(q_1 \ldots q_n; \quad \beta_{1k} \ldots \beta_{nk}).$$

Hieran schliesst sich noch folgende Bemerkung über die *Bedeutung der Wurzeln* λ_i *als Minima von* $\varphi(q_1 \ldots q_n)$.

Sind die Wurzeln $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ nach der Grösse geordnet, so dass λ_1 die kleinste ist, so gilt, da

$$\frac{\varphi(q_1 \cdots q_n)}{\psi(q_1 \cdots q_n)} = \frac{\lambda_1 r_1^2 + \cdots + \lambda_i r_i^2 + \cdots + \lambda_n r_n^2}{r_1^2 + \cdots + r_i^2 + \cdots + r_n^2}$$

ist, Folgendes:

λ_i *ist das Minimum, welches* $\frac{\varphi}{\psi}$ *annehmen kann, wenn*

die Coordinaten r den Bedingungen $r_1 = r_2 = \cdots = r_{i-1} = 0$, *oder die Coordinaten q den Bedingungen*

$$\psi(q_1 \ldots q_n;\ \beta_{1k} \ldots \beta_{nk}) = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi(q_1 \ldots q_n;\ \beta_{1k} \ldots \beta_{nk}) = 0$$
$$(k = 1, 2 \ldots i - 1)$$

unterworfen sind.

(Diesen Satz kann man sich sehr gut an dem Hauptaxenproblem der Flächen zweiten Grades bezw. dessen Verallgemeinerung veranschaulichen; die Bedingungsgleichungen sind dann die Gleichungen der zu den einzelnen Hauptaxen senkrechten Ebenen, sofern man rechtwinklige Coordinaten benutzt.)

λ_1 ist das *absolute* Minimum von $\frac{\varphi}{\psi}$; daraus folgt für das Schwingungsproblem, *dass die Periode der langsamsten Normalschwingung durch jede zwischen den Coordinaten eingeführte Bedingung* („Gebundenheit") *verkürzt, durch jeden Zuwachs der Masse* (also von ψ) *verlängert wird.* (Für die höheren Normalschwingungen kann man dies nicht allgemein behaupten.)

Es ist nun noch der bisher ausgeschlossene Fall zu betrachten, wo die determinirende Gleichung $D(-\lambda) = 0$ *mehrfache Wurzeln* besitzt. In diesem Falle würden die Integrale der n Differentialgleichungen im Allgemeinen Glieder von der Form $t^m \cos \sqrt{\lambda}\,(t - t')$ enthalten, folglich wäre die Bewegung *nicht mehr stabil.* In der That glaubte daher *Lagrange* diesen Fall ausschliessen zu müssen. Es zeigt sich nun aber bei näherer Untersuchung, dass aus der Lösung alle Potenzen von t verschwinden, wenn für jede ν-fache Wurzel λ_i von $D = 0$ auch alle ersten, zweiten, $\ldots (\nu - 1)^{\text{ten}}$ *Unterdeterminanten* verschwinden, also λ_i eine $(\nu - 1)$fache Wurzel aller ersten, eine $(\nu - 2)$fache aller zweiten, eine 1-fache aller $(\nu - 1)^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten ist. (Vgl. *Routh*, l. c. Cap. VI.) Dass nun diese Bedingung in Folge der speciellen Natur der quadratischen Form ψ hier stets erfüllt ist, hat zuerst *Weierstrass* bewiesen in seiner Abhandlung: „Ueber ein die homogenen Functionen zweiten Grades

betreffendes Theorem nebst Anwendung auf die Theorie der kleinen Schwingungen"*). Ein einfacher Beweis findet sich auch bei *Routh*, welcher (l. c. p. 36—39) zeigt, dass im Falle lauter verschiedener Wurzeln von D dieselben durch die Wurzeln einer ersten Unterdeterminante, letztere durch die Wurzeln einer zweiten Unterdeterminante u. s. f. *separirt werden*, dass also, wenn ν Wurzeln von D zusammenrücken, dies zugleich mit $\nu - 1$, $\nu - 2$... Wurzeln der ersten, zweiten... Unterdeterminanten geschieht. — *Weierstrass* zeigt a. a. O., dass man unter der besprochenen Bedingung, d. h. wenn die Determinante D lauter *einfache „Elementartheiler"* hat, auch im Falle mehrfacher Wurzeln die Formen φ und ψ gleichzeitig auf die Normalformen $\sum_1^n \lambda_i r_i^2$ und $\sum_1^n r_i^2$ bringen kann**).

Ist nun z. B. $\lambda_h = \lambda_{h+1} \cdots = \lambda_{h+\nu-1}$ eine ν-fache Wurzel, so enthalten *beide* Formen die Quadratsumme

$$r_h^2 + r_{h+1}^2 + \cdots + r_{h+\nu-1}^2,$$

welche in der ersten mit λ_h multiplicirt ist. Diese Summe kann man nun *durch* $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$-*fach unendlich viele orthogonale Substitutionen* in sich selbst überführen, da $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ Coefficienten einer Substitution, welche dies leistet, willkürlich wählbar sind.

Demselben Grade von Willkürlichkeit unterliegt demnach die Einführung der zu einer ν-fachen Wurzel gehörenden *Normalcoordinaten*. Die schliessliche Lösung hat also, wenn beispielsweise $\lambda_1 = \lambda_2 \cdots = \lambda_\nu$ ist, die Gestalt

$$q_1 = B_{11} \cos \sqrt{\lambda_1}\,(t - t_{11}) + B_{\nu+1} D_{11}(-\lambda_{\nu+1}) . \cos \sqrt{\lambda_{\nu+1}}\,(t - t_{\nu+1}) + \cdots$$

$$q_2 = B_{12} \cos \sqrt{\lambda_1}\,(t - t_{12}) + B_{\nu+1} D_{12}(-\lambda_{\nu+1}) . \cos \sqrt{\lambda_{\nu+1}}\,(t - t_{\nu+1}) + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_n = B_{1n} \cos \sqrt{\lambda_1}\,(t - t_{1n}) + B_{\nu+1} D_{1n}(-\lambda_{\nu+1}) . \cos \sqrt{\lambda_{\nu+1}}\,(t - t_{\nu+1}) + \cdots,$$

*) Berliner Monatsber. 1858 p. 207.

**) Vergl. auch *Darboux* in den Zusätzen zur neuen Ausgabe von Lagrange's Mécanique analytique, 1888, Tome I, Note VIII.

wo ν von den Constantenpaaren B_{1h}, t_{1h} willkürlich sind. Somit können im Falle einer mehrfachen Wurzel mehrere Coordinaten mit gleicher Periode und *von einander unabhängigen Amplituden und Phasen* schwingen, wodurch die Gesammtbewegung sehr complicirt werden und insbesondere Erscheinungen darbieten kann, welche eine gewisse Aehnlichkeit mit *fortschreitenden* Wellen besitzen. Abgesehen hiervon kann man aber nach dem Vorhergehenden sagen, dass der Fall mehrfacher Wurzeln keine Ausnahmestellung einnimmt.

Die vorhergehenden Entwickelungen über Normalcoordinaten etc., welche im Wesentlichen denjenigen *Rayleigh's* in seiner Theorie des Schalles entsprechen, finden sich in etwas anderer Form wieder in § 5 (Retour à l'hypothèse moléculaire) der schon citirten neueren Arbeit *Poincaré's*. Derselbe behandelt dort die *Wärmeausgleichung in einem System von n Theilchen*, welche gegen einander und in den umgebenden Raum von der Temperatur 0 nach dem Newton'schen Erkaltungsgesetze Wärme ausstrahlen, und findet, dass die Temperaturen $V_1 \ldots V_n$ der n Theilchen den n simultanen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dV_i}{dt} + \sum_1^n{}^k C_{ik}(V_i - V_k) + C_i V_i = 0$$

genügen, welche man, da $C_{ik} = C_{ki}$ ist, auch schreiben kann

$$\frac{dV_i}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial V_i} \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial V_i}\right) = -\frac{\partial\varphi}{\partial V_i}.$$

Dabei ist φ die quadratische Form

$$\sum{}^i \sum{}^k C_{ik}(V_i - V_k)^2 + \sum C_i V_i^2,$$

welche *definit* ist, weil die Constanten C der Natur der Sache nach *positiv* sein müssen; ferner ist $\psi = \sum_1^n{}^i V_i^2$. Transformirt man also nach der besprochenen Theorie durch eine orthogonale Substitution φ auf die Normalform $\sum_1^n \lambda_i U_i^2$,

während $\psi = \sum_1^n U_i^2$ wird, so sind *alle* λ_i *reell und positiv*, und es ergiebt sich

$$\frac{dU_i}{dt} = -\lambda_i U_i,$$

$$U_i = A_i e^{-\lambda_i t}.$$

Man sieht, dass die Behandlung dieses Problems eine vollständig analoge ist, wie die des Schwingungsproblems für ein System von n Graden der Freiheit; dem für letzteres hergeleiteten Satze über die Normalschwingungstypen entspricht hier der folgende:

In einem Systeme von n materiellen Punkten, welche nach dem Newton'schen Erkaltungsgesetze Wärme ausstrahlen, giebt es stets n bestimmte Temperaturvertheilungen von der Art, dass sich bei jeder alle n Punkte mit einer und derselben bestimmten Erkaltungsgeschwindigkeit abkühlen, so dass also die Verhältnisse ihrer Temperaturen constant bleiben.

§ 4. Uebergang zum Grenzfall von unendlich vielen Graden der Freiheit. Einführung der Normalfunctionen.

Wir kommen nun zur Uebertragung der im Vorhergehenden gewonnenen Resultate auf den Fall, dass die Zahl n, d. i. beim Schwingungsproblem der Grad der Freiheit des schwingenden Systems, *unendlich gross* ist.

An Stelle der die Punkte des Systems bestimmenden *Indices* 1, 2 ... n treten dann die gewöhnlichen Coordinaten x, y, z, und die Grössen $q_1 \dots q_n$, die „Coordinaten des Systems", gehen in eine *Function* q der Coordinaten x, y, z und der Zeit über. Die a_{ik}, b_{ik} würden im Allgemeinen Functionen von *zwei* Argumentpunkten, entsprechend ihren beiden Indices. Bei den Schwingungs- und Wärmeleitungsproblemen liegt jedoch der besondere Fall vor, dass in der einen quadratischen Form (ψ) nur die b_{kk} von 0 verschieden sind, während die andere die auf voriger Seite gelegentlich der Poincaré'schen Entwickelung angeführte Form hat mit der Specialisirung, dass nur die C_{ik}, welche sich auf benachbarte Punkte, und

nur die C_i, welche sich auf an der Begrenzung des Systems liegende Punkte beziehen, von 0 verschiedene Werthe haben. Dies hat, wie man leicht erkennt, zur Folge, dass die *Integrale*, in welche die Summen φ und ψ beim Grenzübergang zu $n = \infty$ übergehen, im Falle eines ebenen Gebietes (also etwa einer schwingenden Membran) die Form annehmen:

$$(10)\quad \begin{cases} \varphi = \iint \left\{ A' \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + A'' \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} df \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \int \alpha \bar{u}^2 ds, \\ \psi = \iint A''' u^2 df; \end{cases}$$

analog wird bei drei Dimensionen

$$\varphi = \iiint F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) dv + \iint \alpha \bar{u}^2 do,$$

$$\psi = \iiint A''' u^2 dv,$$

wo F eine quadratische Form ist. Hier, wie weiterhin, bezeichnen dv, do das Raum- und Oberflächenelement eines dreidimensionalen, df und ds das Flächen- und Randelement eines zweidimensionalen Gebietes, und A', A'', A''', B und α irgend welche gegebene Functionen des Ortes. Statt q haben wir eine Function u, die von den Coordinaten x, y, z allein abhängen soll, gesetzt, weil bei der zur Einführung der Normalcoordinaten anzustellenden Untersuchung von φ und ψ die Abhängigkeit des q von der *Zeit* doch nicht in Betracht kommen würde, wie ja auch bei der entsprechenden Untersuchung des vorigen Paragraphen $q_1, q_2 \ldots q_n$ unabhängig von der Zeit sein konnten.

Schreibt man in φ und ψ bezw. q und $\frac{dq}{dt} = q'$ statt u, so bedeutet beim Problem der schwingenden Membran ψ die lebendige Kraft T, φ die potentielle Energie V. Es sei noch bemerkt, dass das Randintegral $\int \alpha \bar{q}^2 ds$ in diesem Falle die potentielle Energie der am Rande wirkenden, mit der Verrückung (q) proportionalen Kräfte ist, welche im Falle einer Nachgiebigkeit des

Rahmens angenommen wurden; wirken solche Kräfte auch im Innern, so tritt zu V noch ein Flächenintegral $\int\int A q^2 df$ hinzu. Endlich kann auch, wenn man die zu bewegende Masse des Rahmens berücksichtigt, zu $\int\int A''' q'^2 df$ ein Randintegral $\int \alpha' q'^2 ds$ hinzukommen; es macht dies aber für das Folgende keinen wesentlichen Unterschied.

Die Integralausdrücke φ und ψ sind nun, wie früher die quadratischen Formen, in die „Normalform", d. h. in Summen oder Integrale überzuführen, deren sämmtliche Glieder bezw. Elemente *Quadrate* der unendlich vielen in u enthaltenen willkürlichen Constanten, multiplicirt mit bestimmten constanten Factoren, sind; diese *willkürlichen Constanten* entsprechen hier nämlich den *Normalcoordinaten* (siehe auch unten). Diese Transformation geschieht, entsprechend dem früheren Verfahren, dadurch, dass man die Maxima und Minima von $\frac{\varphi}{\psi}$ oder diejenigen von φ bei constantem ψ aufsucht. Hier giebt dies die Bedingungsgleichung

$$\delta(\varphi - \lambda\psi) = 0,$$

wo λ ein Lagrange'scher Multiplicator ist und das Zeichen δ die Variation in Bezug auf u bedeutet. Nun liefert die Forderung, dass die erste Variation des Flächenintegrals

$$\int\int \left\{ A' \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + A'' \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \lambda A''' u^2 \right\} df$$

resp. des analogen Raumintegrals verschwinden soll, nach den Regeln der Variationsrechnung für das Innere des Gebietes gerade eine *partielle Differentialgleichung* der von uns zu betrachtenden Art, wie aus dem im I. Theile gelegentlich der *Picard*'schen Arbeit Gesagten hervorgeht. Diese partielle Differentialgleichung für u vertritt demnach jene n linearen Gleichungen für $q_1 \ldots q_n$, deren Determinante D eine so hervorragende Rolle spielte.

Man hätte die partielle Differentialgleichung beim

Schwingungsproblem übrigens auch dadurch erhalten, dass man aus dem Hamilton'schen Princip

$$\delta \int_0^t (T - V)\, dt = 0$$

erst die Bewegungsgleichung für q abgeleitet und in diese auf Grund der früheren Ueberlegung (cf. S. 4) $q = u \cos \frac{t - t'}{\tau}$ eingesetzt hätte. Dies gilt auch für die Luftschwingungen, wo nur die Bedeutung der beiden Integralausdrücke vertauscht ist und das Randintegral in ψ statt in φ auftritt.

Ausser der partiellen Differentialgleichung erhält man aus der Gleichung $\delta(\varphi - \lambda\psi) = 0$ aber auch noch eine Bedingung, welcher u an der Begrenzung des Gebietes genügen muss; denn es ist z. B.*)

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &\delta \iint \left\{ A' \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + A'' \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right. \\ &\qquad\qquad \left. - \lambda A''' u^2 \right\} dx\, dy + \delta \int \alpha \bar{u}^2 ds \\ &= -2 \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(A' \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B \frac{\partial u}{\partial x} + A'' \frac{\partial u}{\partial y}\right) \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \lambda A''' u \right\} \delta u . dx\, dy \\ &\quad + 2 \int \left\{ \left(A' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \cos(nx) \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \left(B \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + A'' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \cos(ny) + \alpha \bar{u} \right\} \delta u\, ds. \end{aligned} \right.$$

Man findet demnach eine *Grenzbedingung* von der in § 1 dieses Theiles aufgestellten allgemeinen Form

$$\gamma_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \alpha \bar{u} = 0.$$

Die Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ ist in derselben zwar, wenn man will, auch mit enthalten (für $\alpha = \infty$); doch ist es

*) Dass hier $df = dx\, dy$ gesetzt wird, ist keine Beschränkung, da man, wenn $df = C . dx\, dy$ ist, nur den Factor C aus den Functionen A', B, A'', A''' abzusondern braucht.

besser, dieselbe besonders zu behandeln und dann in dem Ausdrucke φ das Randintegral fortzulassen.

Auf den ersten Blick mag es scheinen, als ob die Grenzbedingung bei dem Uebergang zu einem stetigen Körper neu hinzuträte. In Wirklichkeit würde man aber bei Systemen von einer endlichen Anzahl von Graden der Freiheit etwas ganz Analoges haben, wenn man die äussersten Punkte der Systems gesondert betrachtete. Man überzeugt sich leicht, dass für diese specielle Bedingungen (Befestigung; äussere Kräfte, welche sie in der Gleichgewichtslage zu halten streben) gegeben sein müssen. Dieselben kamen aber bei der allgemeinen Behandlung des Problems nicht zum besonderen Ausdruck, sondern waren implicite in den Werthen der a_{hk} und b_{hk} enthalten; so enthielt das System der n linearen Gleichungen S. 41 selbst schon die Grenzbedingung. Ein lehrreiches Beispiel für die Entstehung der Grenzbedingung beim Uebergang zu $n=\infty$ ist das nach der Lagrange'schen Methode behandelte Problem der schwingenden Saite*).

Wir schliessen jetzt, indem wir zum Grenzfall $n=\infty$ übergehen, aus den früheren Sätzen über die Wurzeln der determinirenden Gleichung $D(-\lambda)=0$, *dass es stets unendlich viele reelle Werthe von λ giebt, für welche den Stetigkeitsbedingungen genügende Lösungen unserer partiellen Differentialgleichung bei den eben angegebenen Grenzbedingungen möglich sind* **).

Jene *„ausgezeichneten" Werthe* von λ, oder von k^2 nach der früheren Bezeichnung***), können als die Wurzeln einer

---

*) cf. Lagrange, Mécanique analytique, Tome I, p. 390—422. Ferner z. B. Routh, l. c. Cap. IX.

**) Eine Hauptschwierigkeit des auf den Uebergang zu $\lim n=\infty$ zu begründenden Existenzbeweises würde der Nachweis sein, dass eine durch beliebige Interpolation aus den n Functionalwerthen $q_1 \ldots q_n$ hergestellte Function u beim Grenzübergang in eine nebst ihren ersten Differentialquotienten stetige, der partiellen Differentialgleichung genügende Function übergeht.

***) Die im I. Theil mit k^2 bezeichnete Grösse unterscheidet sich von dem jetzt eingeführten λ nur durch einen gegebenen Factor, welcher

transcendenten Gleichung angesehen werden, welche man freilich erst mit Hüfe der Grenz- bezw. Stetigkeitsbedingungen aufstellen kann, nachdem eine geeignete Lösung der partiellen Differentialgleichung mit unbestimmtem λ gefunden ist. — Dass alle Wurzeln λ *positiv* sind, kann man, den früheren Entwickelungen entsprechend, nur dann behaupten, wenn nicht nur, wie immer vorausgesetzt wird, A', B, A'' etc. und A''', sondern auch α ausschliesslich *positive* Werthe annimmt. (Siehe auch S. 59 unten.) — Es lässt sich auch nicht allgemein schliessen, dass die ausgezeichneten Werthe *discrete* Werthe sind, d. h. *in Intervallen auf einander folgen*; in der That werden wir Ausnahmefälle kennen lernen, wo sie eine *continuirliche Reihe* bilden, und wo also innerhalb gewisser Grenzen *alle* Werthe für λ statthaft sind.

Wir haben uns nun mit den Lösungen $u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$ der partiellen Differentialgleichung für u zu beschäftigen, welche zu den ausgezeichneten Werthen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ gehören, und welche wir *ausgezeichnete* Lösungen oder, wenn über den in ihnen enthaltenen willkürlichen constanten Factor in bestimmter, sogleich näher anzugebender Weise verfügt worden ist, *Normalfunctionen* des betrachteten Bereiches nennen. Jede derselben geht beim Grenzübergang aus einem solchen Werthsystem der Grössen $q_1 \ldots q_n$ hervor, welches man aus den n linearen Gleichungen S. 45 durch Einsetzen einer speciellen Wurzel λ_i erhält. Dieses zu λ_i gehörige Werthsystem ist aber nach dem S. 43 u. 46 Gesagten bis auf einen gemeinsamen Factor identisch mit den Coefficienten $\beta_{1i}, \beta_{2i}, \ldots \beta_{ni}$ der Substitution, durch welche die „Normalcoordinaten" $r_1 \ldots r_n$ eingeführt wurden. Vielleicht ist es nützlich, besonders hervorzuheben, dass hiernach die *ausgezeichneten Lösungen* oder *Normalfunctionen* u_i in keiner Weise mit den *Normalcoordinaten* verwechselt werden dürfen. Die letzteren sind auch jetzt nichts anderes, als willkürliche Constanten, bezw. Producte aus solchen in $\cos \sqrt{\lambda_i}\,(t - t_i)$ oder $e^{-\lambda_i t}$.

---

in dem einfachen Falle, wo $B = 0$, $A' = A''$ ist und A' und A''' Constanten sind, den Werth $\frac{A'''}{A'}$ hat.

Wenn man über die absoluten Werthe der Coordinaten q_h und r_h durch die Festsetzung $\psi = 1$ verfügt, werden die zu $\lambda = \lambda_i$ gehörigen Werthe $q_1 \ldots q_n$ mit den $\beta_{1i} \ldots \beta_{ni}$ selbst identisch, so dass das System der β_{hi} für $n = \infty$ direct in u_i übergeht. Aus den S. 47 für die Coefficienten β_{ik} aufgestellten Orthogonalitätsbedingungen entstehen dann für zweidimensionale Gebiete folgende *Integralrelationen für die Normalfunctionen:*

$$\text{(12a)} \quad \iint A''' u_h u_k \, df = 0,$$

$$\text{(12b)} \quad \iint \left\{ A' \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial u_k}{\partial x} + B \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} \frac{\partial u_h}{\partial y} + \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) + A'' \frac{\partial u_h}{\partial y} \frac{\partial u_k}{\partial y} \right\} df + \int \alpha \bar{u}_h \bar{u}_k \, ds = 0,$$

$$\text{(12c)} \quad \iint A''' u_h^2 \, df = 1,$$

$$\text{(12d)} \quad \iint \left\{ A' \left(\frac{\partial u_h}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial u_h}{\partial y} + A'' \left(\frac{\partial u_h}{\partial y} \right)^2 \right\} df + \int \alpha \bar{u}_h^2 \, ds = \lambda_h.$$

Wie sich diese Gleichungen für ein- und dreidimensionale Gebiete gestalten, ist ohne Weiteres klar. Die dritte (oder vierte) derselben bestimmt den constanten Factor, welcher in einer ausgezeichneten Lösung zunächst willkürlich ist. —

Diese Integraleigenschaften kann man auch *direct aus der Definition der Normalfunctionen* durch die Differentialgleichung

$$\text{(13)} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(A' \frac{\partial u_h}{\partial x} + B \frac{\partial u_h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(B \frac{\partial u_h}{\partial x} + A'' \frac{\partial u_h}{\partial y} \right) + \lambda_h A''' u_h = 0$$

und die Grenzbedingung

$$\text{(14)} \quad \left(A' \frac{\partial \bar{u}_h}{\partial x} + B \frac{\partial \bar{u}_h}{\partial y} \right) \cos(nx) + \left(B \frac{\partial \bar{u}_h}{\partial x} + A'' \frac{\partial \bar{u}_h}{\partial y} \right) \cos(ny) + \alpha \bar{u} = 0$$

in folgender Weise ableiten. — Bekanntlich gilt für zwei endliche und stetige Functionen $X(x, y)$, $Y(x, y)$ die Identität:

$$\iint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx\,dy = \int (\bar{X} \cos(nx) + \bar{Y} \cos(ny)) \, ds,$$

wo das Doppelintegral über irgend ein ganz im Endlichen liegendes Flächenstück, das Linienintegral über dessen Begrenzung zu erstrecken ist. Setzt man nun erstens

$$X = u_h\left(A'\frac{\partial u_k}{\partial x} + B\frac{\partial u_k}{\partial y}\right), \quad Y = u_h\left(B\frac{\partial u_k}{\partial x} + A''\frac{\partial u_k}{\partial y}\right)$$

und $dx\,dy = df$, so erhält man

$$(15)\left\{\begin{aligned} &\iint u_h\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(A'\frac{\partial u_k}{\partial x} + B\frac{\partial u_k}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial u_k}{\partial x} + A''\frac{\partial u_k}{\partial y}\right)\right\}df \\ &+ \iint\left\{A'\frac{\partial u_h}{\partial x}\frac{\partial u_k}{\partial x} + B\left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial u_h}{\partial y}\frac{\partial u_k}{\partial x}\right)\right. \\ &\left. + A''\frac{\partial u_h}{\partial y}\frac{\partial u_k}{\partial y}\right\}df = \int \bar{u}_h\left\{\left(A'\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x} + B\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial y}\right)\cos(nx)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \left(B\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x} + A''\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial y}\right)\cos(ny)\right\}ds, \end{aligned}\right.$$

oder nach Benutzung der Differentialgleichung und Grenzbedingung:

$$(15')\left\{\begin{aligned} &\iint\left\{A'\frac{\partial u_h}{\partial x}\frac{\partial u_k}{\partial x} + B\left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial u_h}{\partial y}\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + A''\frac{\partial u_h}{\partial y}\frac{\partial u_k}{\partial y}\right\}df + \int \alpha\,\bar{u}_h\bar{u}_k ds \\ &\qquad\qquad = \lambda_k\iint A''' u_h u_k df. \end{aligned}\right.$$

Da der Ausdruck auf der linken Seite vollständig symmetrisch aus u_h und u_k gebildet ist, so ist er auch

$$= \lambda_h\iint A''' u_h u_k df.$$

Wenn nun u_h und u_k zu *verschiedenen* ausgezeichneten Werthen von λ gehören, so folgt aus diesen beiden Gleichungen, dass sowohl die linke Seite, als auch $\iint A''' u_h u_k df$ gleich Null ist. Damit sind zwei der Integraleigenschaften bewiesen. Die letztere von ihnen nennt *Lord Rayleigh* die Eigenschaft des Conjugirtseins der Functionen u_h, u_k; man kann auch in Hinblick auf die Analogie mit der Relation zwischen den

Coefficienten einer orthogonalen Substitution die Normalfunctionen, welche diese Eigenschaften besitzen, als *zu einander orthogonal* bezeichnen, und diese Benennung soll im Folgenden angewandt werden, da das Wort *conjugirt* schon zu viel in anderen Bedeutungen gebraucht wird.

Aus dem für den Fall eines endlichen n abgeleiteten Resultate folgern wir, dass, wenn λ_h eine *mehrfache* (ν-fache) Wurzel ist, *die zugehörigen Normalfunctionen sich linear durch* ν *solche ausdrücken lassen, welche auf* $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$-*fach unendlich viele Weisen so gewählt werden können, dass je zwei von ihnen zu einander orthogonal sind.* Bei einigen später zu besprechenden Beispielen wird sich dieser wichtige Satz bestätigen. —

Die Orthogonalitätseigenschaft haben *Poisson* und Andere nach ihm benutzt, um zu beweisen, dass die transcendente Gleichung für λ *nur reelle Wurzeln* haben kann. Gäbe es nämlich zwei conjugirt complexe Wurzeln λ_h, λ_k, so wären auch die zugehörigen Normalfunctionen u_h, u_k conjugirt complex, mithin jedes Element des Integrals $\iint A''' u_h u_k df$ positiv, was im Widerspruch stände zur Orthogonalitätsbedingung

$$\iint A''' u_h u_k df = 0.$$

Setzt man in der Gleichung

$$\iint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) df = \int \left(\overline{X} \cos(nx) + \overline{Y} \cos(ny)\right) ds,$$

zweitens

$$X = u_h \left(A' \frac{\partial u_h}{\partial x} + B \frac{\partial u_h}{\partial y}\right), \quad Y = u_h \left(B \frac{\partial u_h}{\partial x} + A'' \frac{\partial u_h{}^2}{\partial y}\right),$$

so erhält man:

$$(16) \quad \begin{aligned} \iint \left\{A' \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\right)^2 + 2B \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial u_h}{\partial y} + A'' \left(\frac{\partial u_h}{\partial y}\right)\right\} df \\ + \int \alpha \bar{u}_h^2 ds = \lambda_h \iint A''' u_h^2 df. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung sieht man zunächst, dass alle ausgezeichneten Werthe von λ *positiv* sind, falls α längs der ganzen

Begrenzung positiv ist; denn bei negativem λ_h könnte die vorstehende Gleichung nur durch $u_h = 0$ befriedigt werden. Da in u_h noch ein constanter Factor willkürlich ist, kann man durch geeignete Wahl desselben bewirken, dass

$$\iint A''' u_h^2 df = 1$$

wird, wodurch (16) in die vierte der Integralrelationen (12) übergeht.

Bezeichnet man die linken Seiten der Gleichungen (12c) und (12d) mit $\psi(u_h)$ bezw. $\varphi(u_h)$, so ist

$$(16') \qquad \lambda_h = \frac{\varphi(u_h)}{\psi(u_h)},$$

und zwar ist dieser Werth *ein Minimum oder Maximum* der Function $\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$; denn wir gelangten ja zu den Normalfunctionen zuerst gerade durch Aufsuchung der Minima oder Maxima dieses Ausdrucks, wobei wir die Existenz solcher Maxima und Minima als durch den Grenzübergang von endlichem zu unendlich grossem n sichergestellt annahmen. Mittelst dieses Grenzüberganges ergiebt sich auch, *dass* $\frac{\varphi}{\psi}$ *für* $u = u_h$ *den kleinsten Werth annimmt, der möglich ist, wenn die Function* u *den Bedingungsgleichungen genügen soll:*

$$\iint A''' u_1 u df = \iint A''' u_2 u df \ldots = \iint A''' u_{h-1} u df = 0,$$

welche wir nach Analogie der Bezeichnung S. 46 *schreiben:*

$$\psi(u, u_1) = \psi(u, u_2) = \cdots = \psi(u, u_{h-1}) = 0,$$

oder auch $\varphi(u)$ *den kleinsten Werth bei denselben Nebenbedingungen und der neu hinzukommenden:* $\psi(u) = 1$.

*H. Weber**) hat die *Existenz* der ausgezeichneten Lösungen durch die Erwägung beweisen wollen, dass es eine Function u geben müsse, für welche bei den Nebenbedingungen

$$\psi(u) = 1, \quad \psi(u, u_1) = \psi(u, u_2) \ldots = \psi(u, u_{h-1}) = 0$$

---

*) Math. Ann. **1** p. 1ff. 1868. Vergl. auch *Poincaré*, Amer. Journ. of Math. XII, No. 3, 1889.

der Ausdruck φ ein Minimum wird; diese Function u hat dann nothwendig alle Eigenschaften der Normalfunction u_h. Dies ist übrigens insofern nicht *genau* die Betrachtungsweise *H. Weber's*, als derselbe nicht die Minima von φ, sondern diejenige des Flächenintegrals*)

$$\iint \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} df$$

allein aufsucht, und dafür noch, um die Randbedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ zu erhalten, fordert, dass das Randintegral $\int \bar{u}^2 ds$ einen constanten Werth haben soll; auch setzt er $\psi = \iint u^2 df$ nicht $= 1$, sondern gleich einer anderen Constante c. Diese Unterschiede sind jedoch, wie man sieht, nur unwesentlich.

Die angedeutete Schlussweise kann nun aber die Existenz der Normalfunctionen nicht beweisen, weil man nicht weiss, ob die Function u, welche allen Nebenbedingungen genügt, und für welche φ, d. h.

$$\iint \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} df,$$

seinen kleinsten Werth erreicht, noch *stetig* ist. *H. Weber* hielt sie dennoch begreiflicher Weise für beweiskräftig, weil zu jener Zeit das sog. *Dirichlet'sche Princip* der Potentialtheorie, dem sie ja ganz ähnlich ist, von den meisten Mathematikern noch als richtig angesehen wurde. — *Poincaré* dagegen, der in seiner erwähnten Abhandlung die *Weber*'sche Schlussweise mit der Modification, welche wir oben erörtert haben, jedoch ebenfalls nur für den von *Weber* betrachteten speciellen Fall auseinandersetzt, behauptet nur, dass durch sie die Existenz der Normalfunctionen *wahrscheinlich* gemacht werde, was freilich auch schon zu viel gesagt ist.

Dagegen folgt in aller Strenge durch Berechnung der ersten Variation von φ, *dass die durch die partielle Differen-*

---

*) *Weber* sowohl als *Poincaré* betrachten nur den Fall, wo $B = 0$, $A' = A'' = A''' =$ Const. ist.

tialgleichung (13), *die Stetigkeitseigenschaften und die Randbedingung* (14) (*in welcher die Grösse* α *hier aber als positiv vorausgesetzt werden muss*) *definirte Normalfunction* u_h *den Integralausdruck* φ *bei den Nebenbedingungen*

$$(17) \quad \psi(u) = 1, \quad \psi(u, u_1) = \psi(u, u_2) \cdots = \psi(u, u_{h-1}) = 0$$

thatsächlich zu einem Minimum macht, dessen Werth gerade der ausgezeichnete Werth λ_h *ist.* Dass die erste Variation von φ für $u = u_h$ verschwindet, folgt unmittelbar aus Gleichung (11), und ein Maximum ist durch die Natur der Function φ, welche nur positive Werthe annehmen kann, von vornherein ausgeschlossen. Der letzte Theil des vorstehenden Satzes, d. h. dass $\lambda_h = \varphi(u_h)$ ist, ergiebt sich aus Gleichung (16).

§ 5. Fortsetzung. Reihenentwickelungen nach Normalfunctionen etc.

Durch die Normalfunctionen u_h und die Normalcoordinaten r_h drückt sich nun die *vollständige Lösung* q wie folgt aus:

$$(18) \qquad q = \sum_1^{\infty}{}^h u_h r_h ,$$

welche Gleichung jetzt das frühere System linearer Gleichungen

$$q_i = \sum_1^{n}{}^k \beta_{ik} r_k \quad (i = 1 \cdots n)$$

vertritt. Die r_h sind, gerade wie bei endlichem n, bei Schwingungsproblemen von der Form $A_h \cdot \frac{\cos \sqrt{\lambda_h} \cdot (t - t_h)}{\cos \sqrt{\lambda_h} \cdot t_h}$, bei Wärmeproblemen von der Form $A_h \cdot e^{-\lambda_h t}$, wobei die A_h willkürliche Constanten sind. Die kinetische und potentielle Energie erhalten bei den Schwingungen von Membranen die Gestalt:

$$(19) \qquad T = \sum_1^{\infty}{}^h r_h'^2, \quad V = \sum_1^{\infty}{}^h \lambda_h r_h^2;$$

umgekehrt ist es bei Luftschwingungen. Man erkennt aus (19) sofort den Satz, dass die für eine Zeit, die ein ganzes Viel-

faches der tiefsten Fundamentalschwingungsdauer ist, gebildeten Mittelwerthe von T und V *einander gleich* sind.

Setzt man die Zeit t constant, z. B. $= 0$, so ergiebt sich die vollständige Lösung für q bei der mehrfach erwähnten Grenzbedingung in der Form:

$$q = u = \sum_{1}^{\infty}{}_h' A_h u_h. \tag{20}$$

Da nun diese unendliche Reihe den *Anfangszustand* von q darstellt, so schliessen wir aus dem *Ohm'schen Princip* (S. 4), vorbehältlich näherer mathematischer Untersuchung, dass sie eine willkürlich gegebene Function u darzustellen vermag. Somit gelangen wir zu dem Satz: „*Jedes für einen gegebenen Bereich geltende vollständige System von Normalfunctionen liefert eine Reihendarstellung einer für das Innere dieses Bereiches willkürlich gegebenen Function; dabei kann man eine beliebige partielle Differentialgleichung und eine beliebige Grenzbedingung der von uns betrachteten Art zu Grunde legen.*"

Auf dem *Rande* können keine willkürlich vorgeschriebenen Werthe mehr dargestellt werden, da alle Glieder der Reihe einer und derselben Gleichung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} = 0$ genügen. Die *Bestimmung der Coefficienten* in der unendlichen Reihe (20) wird durch die Orthogonalitäts-Eigenschaft der Normalfunctionen ermöglicht; es ergiebt sich nämlich mit Rücksicht auf (12a) und (12c), wenn man beide Seiten von (20) mit $A''' u_h df$ multiplicirt und über das gegebene Gebiet integrirt:

$$A_h = \int\int A''' u u_h \, df, \tag{21}$$

welche Formel hier der inversen Substitution (S. 47) entspricht. Dieselbe Coefficientenbestimmung ergiebt sich, wie für die Fourier'sche Reihe hinlänglich bekannt ist, wenn man u durch eine Summe $\sum A_h u_h$ von einer *endlichen*, beliebig grossen Gliederzahl möglichst genau darstellen will und die A_h *nach der Methode der kleinsten Quadrate* berechnet (vergl. z. B. die mehrfach erwähnte Arbeit von *Poincaré*, § 3).

In besonderen Fällen tritt an Stelle der unendlichen Reihe eine *Integraldarstellung*, nämlich stets dann, wenn die Werthe λ_h, also auch die Normalfunctionen u_h eine *stetige* Mannigfaltigkeit bilden; eine solche Darstellung hat die Form

$$(22) \qquad u = \int_{\lambda'}^{\lambda''} A_h u_h \, d\lambda_h ,$$

wo λ', λ'' die äussersten von λ erreichten Werthe sind. Dies tritt in der Regel ein für Gebiete, die sich in's Unendliche erstrecken, ausserdem aber unter Umständen, z. B. wenn die Function A''' unendlich gross wird (K.), auch für ganz im Endlichen liegende Gebiete. Dass im Falle von zwei Dimensionen ein Unendlichgrosswerden von A''', d. i. des Factors von u in der Differentialgleichung, dieselbe Wirkung hat, wie eine unendliche Ausdehnung des Bereiches, folgt aus dem S. 29 besprochenen Verhalten der Differentialgleichung bei der conformen Abbildung. Wenn die Normalfunctionen Producte aus zwei Functionen je einer Coordinate sind, so können auch Reihendarstellungen in Bezug auf die eine, Integraldarstellungen in Bezug auf die andere unabhängige Variabele vorkommen; ähnliche gemischte Darstellungen sind natürlich für dreidimensionale Bereiche möglich*).

Wie wir in der Einleitung bemerkten, ist es hier nicht unsere Absicht, irgendwie genauer auf diese Lehre von den Reihenentwickelungen bezw. Integraldarstellungen einzugehen.

Die zur Coefficientenbestimmung dienende Formel (21) behält ihre Gültigkeit auch in dem Falle, wo u_h zu einem *mehrfachen* (ν-fachen) ausgezeichneten Werthe gehört, vorausgesetzt, dass u_h einem Systeme von ν zu einander orthogonalen (conjugirten) bezüglichen Normalfunctionen angehört; es wurde in § 4 (S. 49) der Satz begründet, *dass man ein solches System stets auf* $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$*-fach unendlich viele Weisen herstellen kann.*

---

*) Die Fourier'schen Integraldarstellungen geben hierfür bereits verschiedenartige Beispiele. In *Rayleigh*'s Theorie des Schalles finden sich *keine Integraldarstellungen.*

Ist dagegen in diesem Falle u_h eine *beliebige* ausgezeichnete Lösung, also aus ν speciellen zu einander orthogonalen mit willkürlichen Coefficienten linear zusammengesetzt, so ist die Formel (21) *nicht* mehr anwendbar, weil eine solche Lösung nicht nur *eine* willkürliche Constante (einen constanten Factor, welcher entweder durch die Gleichung $\int\int u_h^2 \cdot A''' df = 1$ oder durch Angabe *des Werthes von* u_h *in einem Punkte* bestimmt wird), sondern deren ν enthält. *Eine zu einem* ν*-fachen ausgezeichneten Werthe* λ *gehörende Lösung* u *ist demnach erst bestimmt, wenn ihre Werthe in* ν *Punkten des Gebietes gegeben sind.* Diese Punkte dürfen aber *nicht ganz willkürlich* angenommen werden, wie man sogleich bemerkt. Es sei $u_1 \dots u_\nu$ ein System von zu einander orthogonalen ausgezeichneten Lösungen oder von Normalfunctionen, und es werde durch einen oberen Index $i (= 1 \dots \nu)$ der Werth einer jeden im i^{ten} Punkte bezeichnet. Nun sei die zu betrachtende ausgezeichnete Lösung

$$u = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots + A_\nu u_\nu.$$

Damit sich die Constanten $A_1 \dots A_\nu$ aus $u^{(1)} \dots u^{(\nu)}$ berechnen lassen, *muss die Determinante*

$$\begin{vmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_\nu^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_\nu^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^\nu & u_2^\nu & \dots & u_\nu^\nu \end{vmatrix}$$

von 0 *verschieden sein*, und dies ist also die Beschränkung, welcher die Wahl der ν Punkte zu unterwerfen ist. Es ist nothwendig und hinreichend, dass diese Bedingung für *irgend ein* System von Normalfunctionen erfüllt ist; denn da alle anderen Systeme aus jenem durch *orthogonale Substitutionen* erhalten werden, so hat obige Determinante immer denselben Werth, welches System man auch für $u_1 \dots u_\nu$ wählen mag. Im Falle eines *zweifachen* Ausnahmewerthes, welcher der bei Weitem wichtigste ist, besagt die in Rede stehende Bedingung, dass die Punkte, in welchen u beliebig vorgeschrieben

wird, nicht *beide* auf Nulllinien oder -Flächen (Knotenlinien bezw. -Flächen) *derselben* Normalfunction liegen dürfen; es wäre dann nämlich $u_1^{(1)} : u_2^{(1)} = u_1^{(2)} : u_2^{(2)}$. Speciell darf nicht einer der beiden Punkte ein *Schnittpunkt von zwei Knotenlinien* oder ein Punkt einer Schnittcurve von zwei Knotenflächen sein, welche zwei *verschiedenen* Normalfunctionen angehören (vergl. unten). Wenn $\nu - 1$ Punkte gegeben sind, in welchen $u = 0$ sein soll, so lassen sich daraus im Allgemeinen die *Verhältnisse* $A_1 : A_2 \cdots : A_\nu$ berechnen, wodurch dann *u bis auf einen willkürlichen Factor*, insbesondere also *das System seiner Knotenlinien oder -Flächen* bekannt ist.

Hieraus folgt, dass durch $\nu - 1$ feste Punkte im Allgemeinen nur *ein* System von Knotenlinien bezw. Knotenflächen einer ν-fachen ausgezeichneten Lösung hindurchgeht. Speciell ergiebt sich für *zweifache* ausgezeichnete Lösungen in der *Ebene* der Satz:

Durch jeden Punkt eines gegebenen Bereiches geht eine und im Allgemeinen nur eine Knotenlinie hindurch; ausgenommen sind nur gewisse, in endlicher Anzahl vorhandene Punkte, durch welche alle überhaupt möglichen Knotenlinien hindurchgehen.

Lässt man das Verhältniss $A_1 : A_2$ sich stetig ändern, — eine solche Aenderung kann bei einer schwingenden Membran in der That mit der Zeit stattfinden, da u_1 und u_2 mit periodischen Functionen der Zeit von gleicher Periode, aber *verschiedener Phase* multiplicirt werden können, — so drehen sich die Knotenlinien gleichsam um die soeben erwähnten besonderen, immer unverrückt bleibenden Punkte, wobei der Drehungssinn für alle durch denselben Punkt gehenden Knotenlinien der gleiche, für benachbarte Knotenpunkte aber der entgegengesetzte ist (vergl. das Beispiel des Quadrats in § 6). Eine in solcher Weise schwingende Membran bietet eine Erscheinung dar, welche grosse Analogie mit fortschreitenden Wellen besitzt.

Beispiele für die hier besprochenen Verhältnisse werden wir beim Quadrat, gleichseitigen Dreieck und Kreis kennen lernen.

B. Lösbare Specialfälle.

§ 6. Fälle, in welchen die Normalfunctionen trigonometrische Functionen sind.

Nachdem im Vorhergehenden die wichtigsten *allgemein* angebbaren Eigenschaften der Normalfunctionen ausführlich besprochen worden sind, soll nun in den Paragraphen 6—9 ein Bericht über diejenigen Fälle gegeben werden, in welchen man bisher die Normalfunctionen resp. ausgezeichneten Lösungen *wirklich hergestellt* hat. Es handelt sich dabei ausschliesslich um ausgezeichnete Lösungen der einfachen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und solcher Gleichungen, welche durch Einführung anderer *orthogonaler* Coordinaten aus derselben hervorgehen; ferner wird die Grösse h der Grenzbedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ immer als auf der ganzen Begrenzung oder auf Theilen derselben *constant* vorausgesetzt.

a. *Eindimensionale Gebiete. Sturm'sche Sätze.*

Bevor wir mit dieser Besprechung der Lösungen für specielle zwei- und dreidimensionale Gebiete beginnen, mögen hier diejenigen Untersuchungen in Erinnerung gebracht werden, welche sich auf *eindimensionale* Gebiete, also auf die Integrale einer *gewöhnlichen* linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung für ein gegebenes Intervall der unabhängigen Variabeln beziehen; denn die Kenntniss der Eigenschaften dieser Integrale ist für die folgenden Abschnitte sehr nützlich, zum Theil sogar nothwendig. Es handelt sich hier um die fundamentalen Arbeiten von *Sturm und Liouville**). *Sturm* ist auf diese Untersuchung offenbar durch das Problem der Wärmeleitung in einem Stabe geführt worden, wie ja in Frankreich überhaupt seit *Fourier's* Zeit mit Vorliebe Wärmeleitungsprobleme behandelt worden sind.

---

*) Liouville's Journal I, 1836, p. 106—186, 253—65, 269—77, 375—444.

Die Form der Differentialgleichung, welche *Sturm* betrachtet, ist die schon in I. § 4 angegebene:

$$\frac{d}{dx}\left(a_{11}\frac{du}{dx}\right) + au = 0;$$

es wurde dort auch erwähnt, dass sich *jede beliebige* lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung auf diese Form bringen lässt. In Betreff der Function $a_{11}(x)$ setzt *Sturm* immer voraus, dass sie für alle in Betracht kommenden Werthe von x durchaus *positiv* ist, wie es auch bei allen bisher behandelten, von einer solchen Differentialgleichung abhängenden physikalischen Problemen der Fall ist (vergl. I. §§ 1 u. 3). In seiner ersten Abhandlung macht *Sturm* über die Function a *keine* Voraussetzung (ausser der Stetigkeit) und betrachtet sodann allgemein den Einfluss, welchen eine Aenderung von a_{11} und a auf das Verhalten der Integrale u hat. Später zerlegt er a in die Summanden $k^2 a_1(x) + a(x)$ und betrachtet in der Differentialgleichung nur k^2 (in seiner Bezeichnung r) als variabelen Parameter, wie dies ja den physikalischen Problemen mehr entspricht; dabei wird a keiner Beschränkung unterworfen, aber a_1 als im ganzen Gebiete von x *positiv* vorausgesetzt, ebenfalls entsprechend seiner physikalischen Bedeutung bei den Problemen der schwingenden Saiten, Stäbe oder Luftsäulen und der Wärmeleitung. Es soll nun im Folgenden eine Uebersicht über die wichtigsten Sätze gegeben werden, welche *Sturm* für die Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(a_{11}\frac{du}{dx}\right) + (k^2 a_1 + a)u = 0 \tag{23}$$

bewiesen hat:

1. Wenn $u = 0$ wird, kann nicht zugleich $\frac{du}{dx} = 0$ sein, ohne dass u identisch $= 0$ ist; folglich erleidet die Function u jedesmal, wenn sie verschwindet, einen *Zeichenwechsel*.
2. Die Werthe von x, für welche ein Integral u verschwindet, wachsen beständig, wenn man den Werth $h_0 = \left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right)_{x=x_0}$ zunehmen lässt. Zwei beliebige Integrale derselben Differentialgleichung (23), für welche im Allgemeinen der Werth

von $\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right)$ an der Grenze x_0 (und folglich auch an der anderen) verschieden ist, besitzen *Nullstellen*, welche sich *gegenseitig separiren*, d. h. so liegen, dass zwischen je zwei Nullstellen des einen Integrales immer *eine* des anderen liegt; die Anzahl der Nullstellen kann für beide Integrale also höchstens um 1 differiren.

3. Sind u, u' zwei Integrale von (23), die zu zwei verschiedenen Werthen k^2, k'^2 gehören, ist ferner $k' > k$ und u für $x = x_0$ und für $x = x_1$ gleich Null, für alle zwischenliegenden Werthe x aber *positiv*, so erleidet u' zwischen x_0 und x_1 mindestens *einen* Zeichenwechsel. Ebenso folgt, wenn u zwischen x_0 und x_1 *einen* Zeichenwechsel erleidet, dass für u' in demselben Gebiete mindestens *zwei* stattfinden, u. s. f.
4. Schreibt man für u an einer Stelle $x = x_0$ die Bedingung $h_0 u - \frac{du}{dx} = 0$ vor, worin h_0 eine gegebene Constante ist, und lässt k^2 stetig wachsen, so nehmen diejenigen Werthe von x auf der positiven Seite von x_0, für welche u verschwindet, *beständig ab*. An einer beliebig gewählten, festgehaltenen Stelle x_1 wechseln u und $h_1 u + \frac{du}{dx}$, wo h_1 eine gegebene andere Constante ist, bei continuirlich wachsendem k^2 abwechselnd das Vorzeichen.
5. Es giebt eine *unendliche Reihe von Werthen* k^2, für welche u an den Grenzen eines gegebenen Intervalles $x_0 < x < x_1$ den Bedingungen $h_0 u - \frac{du}{dx} = 0$ bezw. $h_1 u + \frac{du}{dx} = 0$ genügt. Diese Werthe von k^2, welche die Wurzeln einer gewissen transcendenten Gleichung sind oder doch so angesehen werden können, *sind sämmtlich reell und*, falls h_0, h_1 und a positiv sind, ebenfalls *positiv*. (Dieser Satz ist ein specieller Fall des in II. § 4 erörterten.) Es können keine zwei Wurzeln jener Gleichung einander gleich sein. Ist a nicht im ganzen Intervall positiv, so kann auch eine beschränkte Anzahl negativer Wurzeln k^2 vorhanden sein.
6. Sind $k_1^2, k_2^2, \dots k_n^2 \dots$ jene Wurzeln, nach der Grösse geordnet, und $u_1, u_2, \dots u_n \dots$ die zugehörigen Integrale der

Differentialgleichung (23), (also bis auf einen constanten Factor die hier in Betracht kommenden Normalfunctionen des Gebietes $x_0 < x < x_1$), so hat im Intervalle $x_0 < x < x_1$ (mit Ausschluss der Grenzen) u_1 *keine* Nullstelle, u_2 *eine*, u_3 *zwei*, ... u_n $(n - 1)$, und die Nullstellen zweier aufeinanderfolgender Functionen u_h, u_{h+1} *separiren sich* gegenseitig.

7. Ein mit willkürlichen Constanten $A_m \dots A_n$ gebildetes lineares Aggregat der Integrale $u_m \dots u_n$,

$$U = A_m u_m + A_{m+1} u_{m+1} + \cdots + A_n u_n,$$

(welche Function natürlich *nicht* der Differentialgleichung (23) genügt), besitzt im Intervall $x_0 < x < x_1$ mindestens $m - 1$ und höchstens $n - 1$ Nullstellen.

Die Sätze 2—6 lassen sich fast alle mit Hülfe der direct aus der Differentialgleichung (23) ableitbaren Gleichung

$$\left[a_{11}\left(u' \frac{du}{dx} - u \frac{du'}{dx}\right)\right]_{x_0}^{x_1} = (k'^2 - k^2) \int_{x_0}^{x_1} a_1 u u' \, dx$$

durch Vergleichung der Vorzeichen beider Seiten beweisen. Es ist dies die vielbenutzte Relation, welche, wenn u, u' Normalfunctionen des Gebietes $x_0 \dots x_1$ sind, die „Orthogonalitäts-Eigenschaft" ergiebt. (Vergl. über die Sturm'schen Sätze auch *Routh*, l. c. p. 240—43, und *Rayleigh*, l. c. I p. 232—38.)

Den Satz 6) hat *Sturm* zuerst durch eine sich auf das Erkaltungsproblem beziehende *physikalische* Erwägung gewonnen*). Es stellt nämlich

$$B_m u_m e^{-k_m^2 t} + \cdots + B_n u_n e^{-k_n^2 t}$$

ein mögliches Erkaltungsgesetz für einen bei $x = x_0$ und $x = x_1$ begrenzten Stab von der inneren Leitungsfähigkeit a_{11}, dem Ausstrahlungsvermögen a und der Wärmecapacität a_1 dar; für $t = +\infty$ reducirt sich dieser Ausdruck auf das erste Glied, für $t = -\infty$ auf das letzte, und hat also in diesen Grenzfällen $m - 1$ bezw. $n - 1$ Zeichenwechsel. Es ist nun physikalisch selbstverständlich, dass während der Erkaltung, die zur Zeit $t = -\infty$ begonnen hat, *keine neuen*

*) Liouville's Journal I, p. 432—34.

Zeichenwechsel auftreten können, und daraus folgt, dass jeder Ausdruck $A_m u_m + \cdots + A_n u_n$ nicht weniger als $m - 1$ und nicht mehr als $n - 1$ Zeichenwechsel haben kann.

Ohne Hineinziehung der Zeit ist der Satz später von *Sturm**) selbst, sowie schon vorher von *Liouville***) bewiesen worden; letzterer hat auf denselben seinen, vom Standpunkte der modernen Functionentheorie allerdings noch nicht befriedigenden, Beweis für die *Entwickelbarkeit einer willkürlichen Function von x in eine Reihe* $\sum_1^\infty A_h u_h$ *nach den oben betrachteten Functionen* u_h gegründet. Den Liouville'schen Beweis für den Satz 7) hat *Rayleigh****) etwas abgeändert und vereinfacht. *Sturm* hat, wie aus einer Notiz in Férussac's Bulletin XI, p. 424—425 hervorzugehen scheint, ursprünglich die Absicht gehabt, ein dem Satze 7) analoges Theorem für *räumliche Gebiete* zu finden; es scheint ihm dies aber nicht gelungen zu sein, da er sich später immer auf den Fall *einer* unabhängigen Variabeln beschränkt hat.

Um den Satz 6) nach der Sturm'schen Methode zu beweisen, ist die Voraussetzung wesentlich, dass die Function a_1 im ganzen Intervalle $x_0 \ldots x_1$ *positiv* sei. Man kann sich aber auf geometrischem Wege leicht veranschaulichen, dass er auch noch gelten muss, wenn nur *in einem kleinen Theile* des Gebietes a_1 noch positive Werthe hat. Man bringe zunächst die Differentialgleichung (23) auf die Form

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + (a_1'k^2 + a')u = 0\,, \tag{23'}$$

indem man die durch die Gleichung

$$d\xi = \frac{dx}{a_{11}}$$

definirte neue Variabele ξ einführt und $a_{11}a_1 = a_1'$, $a_{11}a = a'$ setzt. Da a_{11} nach der Voraussetzung überall endlich, stetig

*) Liouville's Journal I, p. 436 ff.

**) Liouville's Journal I, p. 269 ff.

***) Theorie des Schalles 1. Theil, p. 236—38.

und > 0 ist, macht es keinen wesentlichen Unterschied, wenn man u als Function von ξ statt von x betrachtet; die Grenzbedingungen für x_0 und x_1 gehen in solche von derselben Form für $\xi = \xi_0$ und $\xi = \xi_1$ über, nur sind die Constanten h_0, h_1 darin andere. Aus der Form (23′) ersieht man nun sofort, dass die Curve $y = u(\xi)$ überall da, wo

$$a_1' k^2 + a' > 0$$

ist, gegen die ξ-Axe *convergirt*, d. h. derselben die concave Seite zukehrt, dagegen dort, wo $a_1' k^2 + a' < 0$ ist, *divergirt*, d. h. ihr die convexe Seite zuwendet. Lässt man k^2 wachsen, während sonst Alles unverändert bleibt, so wird sowohl die Convergenz als die Divergenz verstärkt; dies hat zur Folge, dass auf den Strecken der ξ-Axe, wo $a_1' k^2 + a' > 0$ ist, immer mehr Schnittpunkte der Curve $y = u(\xi)$ auftreten werden, während auf die übrigen Strecken immer höchstens einer fallen kann. Durch diese Erwägung kann man sich daher verständlich machen, dass man, sofern nur überhaupt für *irgend eine Strecke* der ξ- und somit der x-Axe a_1 *positiv* ist, eine unendliche Reihe von Werthen k^2 so bestimmen kann, dass die entsprechenden, den Grenzbedingungen

$$h_1 u + \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad h_0 u - \frac{du}{dx} = 0$$

genügenden Integrale u im ganzen Intervalle $x_0 < x < x_1$ beziehungsweise an $0, 1, 2, \ldots n \ldots$ Stellen verschwinden. Indessen werden wir von der hiermit bezeichneten Verallgemeinerung des Sturm'schen Satzes späterhin *keine* Anwendung zu machen brauchen.

Das wichtigste *specielle* Problem mit einer unabhängigen Variabeln, für welches man die Normalfunctionen kennt, ist selbstverständlich das der *freien Schwingungen einer Saite von constanter Spannung und Dichte* oder einer *homogenen Luftsäule*, oder auch das der *Longitudinal- und Torsionsschwingungen eines homogenen cylindrischen Stabes*. Da bei demselben $a = 0$ und a_{11} sowie a_1 constant ist, so möge statt $\frac{a_1}{a_{11}} k^2$ kürzer k^2 geschrieben werden. Sind die Enden der Saite bezw. des Stabes

fest oder die der Luftsäule offen, und bezeichnet l die Länge, so sind die Normalfunctionen*):

$$u_n = \sin \frac{n \pi x}{l},$$

wenn n die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchläuft; sind die Enden des Stabes frei (bei der Saite ist dies nicht gut vorstellbar) oder diejenigen der Luftsäule geschlossen, so ist

$$u_n = \cos \frac{(n-1) \pi x}{l}.$$

Die ausgezeichneten Werthe sind im ersten Falle gegeben durch:

$$k_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2},$$

und im zweiten durch:

$$k_n^2 = \frac{(n-1)^2 \pi^2}{l^2},$$

also durch dieselbe Zahlenreihe, wie im ersten Falle, welche hier aber mit dem Werthe 0 beginnt, dem die Normalfunction $u_1 =$ Const. entspricht. Ist ein Ende fest (bezw. offen), das andere frei (bezw. geschlossen), so ist

$$u_n = \sin\left(\frac{2n-1}{2} \cdot \frac{\pi x}{l}\right) \quad \text{oder} \quad = \cos\left(\frac{2n-1}{2} \cdot \frac{\pi x}{l}\right),$$

$$k_n^2 = \left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{l}\right)^2.$$

Die beiden ersten Fälle liefern nach der S. 63 angedeuteten Schlussweise die *Entwickelung einer willkürlichen Function von x nach Sinus oder Cosinus ganzer Vielfacher von* $\frac{\pi x}{l}$. Um die *vollständige Fourier'sche Reihe* zu erhalten, muss man eine neue, bisher nur beiläufig genannte Grenzbedingung einführen, nämlich die, dass u und seine Differentialquotienten

*) Hier und im Folgenden wird eine ausgezeichnete Lösung, welche zu einem einfachen ausgezeichneten Werthe k^2 gehört, häufig auch dann kurz als *Normalfunction* bezeichnet, wenn der constante Factor der Lösung *nicht* gerade der früheren Festsetzung gemäss gewählt ist; nur bei *mehrfachen* ausgezeichneten Werthen ist es nothwendig, zwischen ausgezeichneten Lösungen und Normalfunctionen einen scharfen Unterschied zu machen.

an beiden Grenzen dieselben Werthe haben sollen, mit anderen Worten, dass $u(x)$ die *Periode* l *besitzen* soll. Diese bereits S. 37 erwähnte *Bedingung der Periodicität* tritt bei solchen physikalischen Problemen auf, wo die Differentialgleichung für ein in sich *geschlossenes* Gebiet zu integriren ist; im vorliegenden Fall dient daher als Beispiel am besten eine sehr dünne, in sich zurückkehrende Luftsäule. Es ist klar, dass bei dieser Grenzbedingung sowohl $\cos \frac{2n\pi x}{l}$ als $\sin \frac{2n\pi x}{l}$ zu $k_{n+1}^2 = \left(\frac{2n\pi}{l}\right)^2$ gehörige Normalfunctionen sind, da sie die verlangte Periodicität besitzen und auch der Forderung genügen, zu einander orthogonal zu sein. Hieraus ergiebt sich nun, dass jedes k^2 mit alleiniger Ausnahme von $k_1{}^2$ ein *zweifacher* ausgezeichneter Werth ist. Erwähnenswerth ist noch, dass für irgend zwei verschiedene, zu demselben k^2 gehörige ausgezeichnete Lösungen eines solchen Gebietes aus dem zweiten der oben angeführten Sturm'schen Sätze folgt, *dass ihre Wurzeln sich gegenseitig separiren.*

Ist die Saite oder Luftsäule nach einer oder nach beiden Richtungen hin unbegrenzt, so bilden die ausgezeichneten Werthe von k^2 eine *stetige* Mannigfaltigkeit, und man gelangt zu den *Fourier'schen Integraldarstellungen.* In der That erkennt man leicht, dass die aufeinander folgenden ausgezeichneten Werthe von k^2 sich um so weniger unterscheiden, je grösser l wird, und dass ihr Unterschied wie $\frac{1}{l^2}$ unendlich klein wird bei unbegrenzt wachsendem l. Aehnlich wird man sich bei den späteren Beispielen (Rechteck, Kreis, Kugel etc.) davon überzeugen, dass für unendlich grosse Dimensionen die Reihe der ausgezeichneten Werthe k^2 eine *stetige* wird. —

Oben wurden nur die speciellen Grenzbedingungen $\bar{u} = 0$ und $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ oder, was hier dasselbe ist, $\frac{d\bar{u}}{dx} = 0$ betrachtet. Sind die allgemeineren Bedingungen

$$h_0 \bar{u} - \frac{d\bar{u}}{dx} = 0 \text{ für } x = 0, \quad h_1 \bar{u} + \frac{d\bar{u}}{dx} = 0 \text{ für } x = l$$

vorgeschrieben, so sind die Normalfunctionen zwar auch noch trigonometrische Functionen:

$$u_n = \sin [k_n(x - x_n)],$$

da das allgemeine Integral der Differentialgleichung ja eine solche Form hat; aber die ausgezeichneten Werthe k_n bilden jetzt nicht mehr eine arithmetische Reihe, sondern sind die Wurzeln einer complicirteren transcendenten Gleichung, welche folgendermassen lautet:

$$(24) \qquad \frac{k}{h_1} = \frac{h_0 \operatorname{tg} kl - k}{h_0 + k \operatorname{tg} kl};$$

die Constante x_n bestimmt sich aus:

$$(25) \qquad \operatorname{tg} x_n k_n = \frac{k_n}{h_0}.$$

Man erhält jetzt also auf Grund der Schlussweise auf S. 63 ebenfalls eine *trigonometrische Reihe*, aber die Argumente der einzelnen Glieder sind *nicht mehr ganzzahlige Vielfache* des ersten dieser Argumente. Das bekannteste physikalische Problem, dessen Lösung durch solche Reihen geliefert wird, ist das vielfach behandelte des Wärmeausgleiches in einem Stabe, dessen Endflächen in die Umgebung Wärme ausstrahlen, während die übrige Oberfläche vor Wärmeabgabe geschützt ist. — Ist $h_0 = h_1 = h$, so vereinfachen sich die Gleichungen (24) und (25) zu

$$(24') \qquad \frac{k}{h} = \operatorname{tg} \left(\frac{kl - m\pi}{2}\right),$$

$$(25') \qquad x_n = \frac{k_n l - m\pi}{2k_n}.$$

Darin bedeutet m irgend eine ganze Zahl; es genügt aber, ihr die Werthe 0 und 1 beizulegen, d. h. sämmtliche Wurzeln k zerfallen in zwei Gruppen, von denen die eine durch $\frac{k}{h} = \operatorname{tg} \frac{kl}{2}$, die andere durch $\frac{k}{h} = -\operatorname{cotg} \frac{kl}{2}$ gegeben ist*).

*) In dem anderen speciellen Fall, dass $h_0 = \infty$, d. h. $u = 0$ ist für $x = 0$, sind alle Werthe von k durch die transcendente Gleichung $k = h_1 \operatorname{tg} kl$ gegeben, welche auch bei der Integration unserer Differentialgleichung für die *Kugel* auftreten kann (cf. § 7c) und gelegentlich des letzteren Problems von *Riemann* (Partielle Differentialgleichungen, §§ 65 u. 66) ausführlich discutirt worden ist. Auch hat für diesen Fall *Fudzisawa* (Dissertation, Strassburg 1886) nach *Christoffel* die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Function in die oben erwähnte trigonometrische Reihe streng bewiessn.

Von speciellen gelösten Fällen, bei welchen a_{11} nicht constant ist, sei nur das Problem der freien Schwingungen eines hängenden Seiles, welches nur durch seine eigene Schwere gespannt ist, in Erinnerung gebracht. Die Spannung a_{11} ist dann variabel und zwar $= p_0 \cdot \frac{(l-x)}{l}$, wo p_0 die Spannung am oberen Ende ($x = 0$) bezeichnet. Dieses Problem ist mehrfach behandelt worden, so schon von *Daniel Bernoulli*; es führt auf Bessel'sche Functionen, welche bei dieser Gelegenheit überhaupt zum ersten Male eingeführt worden sind*).

b. *Rechteck und Grenzfälle desselben.*

Ist die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$$

für ein *Rechteck* von den Seiten a (parallel der X-Axe) und b (parallel der Y-Axe) unter der Grenzbedingung

$$h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0,$$

in welcher h längs jeder Seite *constant* ist, zu integriren, so setzt man u gleich einem Producte aus einer Function X von x allein und einer solchen Y von y allein und erhält für diese Functionen die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k'^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + k''^2 Y = 0,$$

worin k'^2, k''^2 Constanten bezeichnen, deren Summe $= k^2$ ist. Diese Differentialgleichungen sind von derselben Form, wie die im Vorhergehenden ausführlich behandelte. Die *Normalfunctionen für das Rechteck* sind also bei der allgemeinen Randbedingung:

$$u_{m,n} = \sin k'_m(x - x_m) \cdot \sin k''_n(y - y_n),$$

wobei k'_m, x_m und k''_n, y_n durch die transcendenten Gleichungen (24) und (25) bestimmt werden, in welchen nur die Bezeichnungen in leicht ersichtlicher Weise zu modificiren sind.

Ist speciell die Randbedingung $\bar{u} = 0$ für alle Seiten

*) *Daniel Bernoulli*, Comm. Acad. Petrop. VI, 1732/33.

gegeben, wie es bei den Schwingungen einer in einen starren Rahmen gespannten Membran der Fall ist, so hat man

$$u_{m,n} = \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$k_{m,n}^2 = k_m'^2 + k_n'^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right).$$

Man sieht sofort, dass die *Knotenlinien*, d. h. die Linien, auf welchen *u verschwindet*, im Allgemeinen *nur Parallele zu den Seiten des Rechtecks* sein werden, welche das ganze Rechteck in $m \,.\, n$ congruente kleinere theilen. Nur wenn k^2 ein *mehrfacher* ausgezeichneter Werth ist, können andere Knotenlinien vorkommen, und dieser Fall ist nur möglich, wenn das Verhältniss $a^2 : b^2$ *rational* ist, weil sich nur dann eine und dieselbe Zahl $\frac{k^2}{\pi^2}$ auf *mehrere* Weisen in der Form $\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}$ (mit ganzzahligen Werthen von m, n) darstellen lässt. Der einfachste hierher gehörige Fall ist derjenige des *Quadrates*, und es ist, trotzdem derselbe schon vielfach behandelt worden ist (z. B. in *Riemann's* Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen), wohl berechtigt, denselben eingehend zu besprechen, weil er das beste Beispiel für mehrfache ausgezeichnete Werthe von k^2 bietet. — Die Normalfunctionen sind hier:

$$u_{m,n} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a},$$

und die zugehörigen Werthe von k^2:

$$k_{m,n}^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (m^2 + n^2).$$

Einfache ausgezeichnete Werthe sind nur diejenigen, für welche $m = n$ ist, und zu welchen Normalfunctionen $u_{m,m}$ gehören, deren Knotenlinien das gegebene Quadrat in m^2 congruente *Quadrate* zerlegen; die diesen Schwingungsarten entsprechenden Töne sind die *harmonischen* Obertöne des Grundtones der Membran, welchen man für $m = n = 1$ erhält, da er der Schwingung *ohne* Knotenlinien entspricht.

Sobald $m \gtrless n$ ist, ist $k_{m,n}^2$ ein *mindestens zweifacher* ausgezeichneter Werth; denn es gehören zu ihm dann die *beiden* verschiedenen Normalfunctionen

$$u_{m,n} = \sin\frac{m\pi x}{a} \cdot \sin\frac{n\pi y}{a} \quad \text{und} \quad u_{n,m} = \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \sin\frac{m\pi y}{a},$$

aus welchen sich eine allgemeinere ausgezeichnete Lösung linear mit willkürlichen Coefficienten zusammensetzt. Die vorstehenden Functionen $u_{m,n}$, $u_{n,m}$ sind dabei unter der einfach unendlichen Mannigfaltigkeit dieser ausgezeichneten Lösungen richtig, d. h. der Orthogonalitätsbedingung entsprechend ausgewählt, da

$$\int_0^a\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a} \cdot \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \sin\frac{m\pi y}{a} \cdot \sin\frac{n\pi y}{a}\, dx dy = 0$$

ist. Die Knotenlinien von $u_{m,n}$ sind m Parallele zur X-Axe und n Parallele zur Y-Axe, diejenigen von $u_{n,m}$ n Parallele zur X- und m zur Y-Axe. Zwischen diesen beiden Knotenliniensystemen giebt es unendlich viele *Uebergangsformen*, deren Gleichung ist

$$A_{m,n} \sin\frac{m\pi x}{a} \cdot \sin\frac{n\pi y}{a} + A_{n,m} \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \sin\frac{m\pi y}{a} = 0,$$

und *welche sämmtlich durch die Schnittpunkte der Liniensysteme* $u_{m,n} = 0$, $u_{n,m} = 0$, also durch $(m-1)^2 + (n-1)^2$ feste Punkte, *hindurchgehen*. Aus der linken Seite der vorstehenden Gleichung kann man den Factor $\sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a}$ absondern; in der That muss ja die *Begrenzung* des gegebenen Quadrates stets dem System der Knotenlinien angehören. Mit Hülfe der soeben erwähnten allen Knotenlinien gemeinsamen Punkte und des im III. Theile zu beweisenden Satzes, dass sich zwei zu demselben u gehörige Knotenlinien stets *senkrecht*, oder allgemein, wenn noch mehr Knotenlinien durch den Schnittpunkt hindurchgehen, *unter gleichen Winkeln* schneiden, ist es leicht, sich eine Vorstellung von der Art des Ueberganges von dem einen der Curvensysteme $u_{m,n} = 0$ und $u_{n,m} = 0$ zum anderen zu machen, wenigstens wenn die Zahlen m und n klein sind. In den Figuren 1—4 $a, b, \ldots h$, S. 80 sind die ausgezeichneten Knotenliniensysteme und eine Reihe von Uebergangsformen für die tiefsten Töne einer quadratischen homogenen Membran von constanter Spannung

bis zum zweiten harmonischen Oberton des Grundtones annähernd dargestellt; die Schwingungszahlen $N_{m,n}$, ausgedrückt durch die Schwingungszahl N_{11} des Grundtones, sind jedesmal beigefügt, ebenso die Function, welche auf den jeweils dargestellten Linien verschwindet. Die Zeichnungen für u_{11}, u_{22}, u_{33} selbst sind als selbstverständlich fortgelassen.

Die ausgezeichneten Knotenlinien, d. h. die durch $u_{m,n} = 0$ und $u_{m,n} \pm u_{n,m} = 0$ gegebenen, finden sich für die beiden ersten Fälle in *Riemann-Hattendorf's* „partiellen Differentialgleichungen" und *Lord Rayleigh's* „Theorie des Schalles", für die drei ersten in *Lamé's* „Léçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides" dargestellt, doch fehlt dort überall die Andeutung der Uebergänge zwischen jenen ausgezeichneten Typen.

In Betreff des *Grundtones* der quadratischen Membran sei hier noch der leicht zu beweisende Satz erwähnt, dass derselbe *tiefer* ist, als der Grundton jeder anderen homogenen *rechteckigen* Membran von derselben Spannung und *demselben Gewicht* oder *demselben Flächeninhalt.*

Ausser den bisher besprochenen zweifachen ausgezeichneten Werthen giebt es beim Quadrate aber auch *vierfache und höhere*, da es ganze Zahlen giebt, die sich auf mehrere Weisen als Summe der Quadrate von zwei ganzen Zahlen darstellen lassen. Um die zahlentheoretische Frage zu entscheiden, wann dies für eine ganze Zahl $r = m^2 + n^2$ möglich ist, zerlege man r zunächst in seine reellen Primfactoren*):

$$r = p_1^{\pi_1} \cdot p_2^{\pi_2} \ldots q_1^{2\varkappa_1} \cdot q_2^{2\varkappa_2} \ldots,$$

wo $\pi_1, \pi_2 \ldots \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots$ irgend welche positive ganze Zahlen und $p_1, p_2 \ldots$ die Primfactoren von der Form $4\nu + 1$, q_1, $q_2 \ldots$ diejenigen von der Form $4\nu + 3$ ($\nu = 0, 1, 2 \ldots$) sind, welche letzteren in einer Zahl von der Form $m^2 + n^2$ nur in *geraden* Potenzen vorkommen können. Die ersteren zerlege man nun in ihre *complexen* Primfactoren:

$$p_1 = (\alpha_1 + \beta_1 i)(\alpha_1 - \beta_1 i), \quad p_2 = (\alpha_2 + \beta_2 i)(\alpha_2 - \beta_2 i), \ldots$$

---

*) Vergl. *Riemann-Hattendorf's* partielle Differentialgleichungen, § 95.

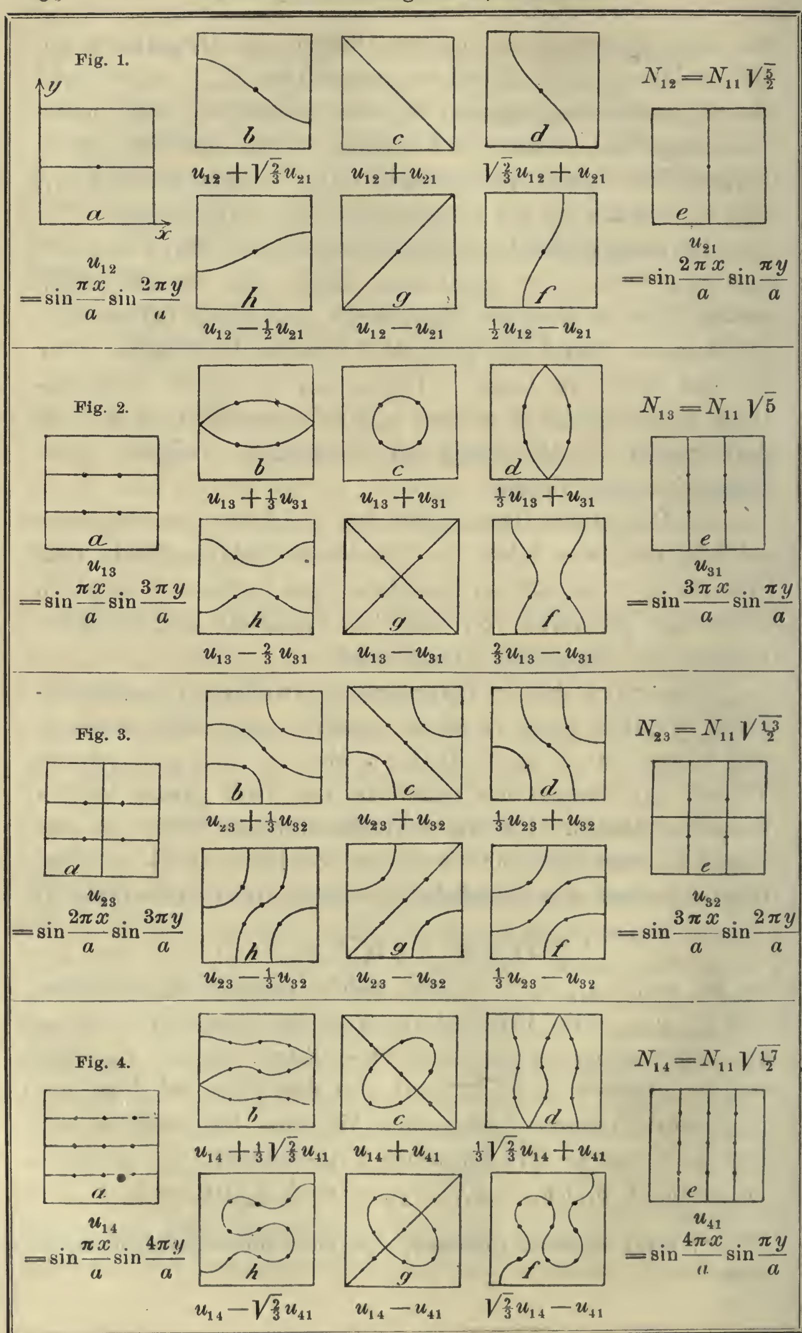


Fig. 1.
y
x
a
$u_{12} = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}$
b
$u_{12} + \sqrt{\frac{2}{3}}u_{21}$
c
$u_{12} + u_{21}$
d
$\sqrt{\frac{2}{3}}u_{12} + u_{21}$
h
$u_{12} - \frac{1}{2}u_{21}$
g
$u_{12} - u_{21}$
f
$\frac{1}{2}u_{12} - u_{21}$
$N_{12} = N_{11}\sqrt{\frac{5}{2}}$
e
$u_{21} = \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$
Fig. 2.
a
$u_{13} = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{a}$
b
$u_{13} + \frac{1}{3}u_{31}$
c
$u_{13} + u_{31}$
d
$\frac{1}{3}u_{13} + u_{31}$
h
$u_{13} - \frac{2}{3}u_{31}$
g
$u_{13} - u_{31}$
f
$\frac{2}{3}u_{13} - u_{31}$
$N_{13} = N_{11}\sqrt{5}$
e
$u_{31} = \sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$
Fig. 3.
a
$u_{23} = \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{a}$
b
$u_{23} + \frac{1}{3}u_{32}$
c
$u_{23} + u_{32}$
d
$\frac{1}{3}u_{23} + u_{32}$
h
$u_{23} - \frac{1}{3}u_{32}$
g
$u_{23} - u_{32}$
f
$\frac{1}{3}u_{23} - u_{32}$
$N_{23} = N_{11}\sqrt{\frac{13}{2}}$
e
$u_{32} = \sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}$
Fig. 4.
a
$u_{14} = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{4\pi y}{a}$
b
$u_{14} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}u_{41}$
c
$u_{14} + u_{41}$
d
$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}u_{14} + u_{41}$
h
$u_{14} - \sqrt{\frac{2}{3}}u_{41}$
g
$u_{14} - u_{41}$
f
$\sqrt{\frac{2}{3}}u_{14} - u_{41}$
$N_{14} = N_{11}\sqrt{\frac{17}{2}}$
e
$u_{41} = \sin\frac{4\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$

Bildet man nun ein Product, worin π_1-mal der Factor $(\alpha_1 \pm \beta_1 i)$ mit beliebiger Combination der Vorzeichen, ebenso π_2-mal der Factor $(\alpha_2 \pm \beta_2 i)$ u. s. w., sowie $\varkappa_1$-mal q_1 u. s. w. vorkommt, und bezeichnet man dieses complexe Product mit $m_h + n_h i$, so ist

$$r = (m_h + n_h i)(m_h - n_h i) = m_h^2 + n_h^2.$$

Aus diesem Verfahren folgt, dass die Zerlegung von r in die Summe von zwei Quadraten auf

$$\tfrac{1}{2}(\pi_1 + 1)(\pi_2 + 1)(\pi_3 + 1) \ldots$$

Weisen möglich ist. Der ausgezeichnete Werth $\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cdot r$ ist also im Allgemeinen ein $\frac{1}{2}\,(\pi_1 + 1)(\pi_2 + 1) \cdots$-facher, doch wird dieser Grad der Multiplicität um μ geringer, wenn es μ-mal vorkommt, dass $m_h = n_h$ ist. Enthält r ausser den ungeraden Primfactoren p und q den Primfactor 2, so wird die Anzahl der Zerlegungen dadurch nicht grösser. Der niedrigste mehr als 2-fache ausgezeichnete Werth ist

$$k^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cdot 65 \quad (4\text{-fach});$$

der niedrigste 6-fache ist $\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cdot 325$, u. s. w. Ueber die Knotenlinien in solchen complicirten Fällen sind noch keine Untersuchungen vorhanden.

Ist für alle Seiten des Quadrates die Randbedingung $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ vorgeschrieben, so sind die Normalfunctionen:

$$u_{m+1,\,n+1} = \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a}$$

und die ausgezeichneten Werthe sind ebenfalls von der Form

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (m^2 + n^2).$$

Hinsichtlich der Multiplicität der letzteren gilt hier also dasselbe, wie bei der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$; neu ist nur, dass jetzt auch die Werthe $m = 0$ und $n = 0$ zulässig sind, so dass es Normalfunctionen giebt, welche nur von *einer* Coor-

dinate abhängen*), sowie auch insbesondere die Normalfunction $u_{1,1} = 1$, zu welcher der Werth $k_{1,1} = 0$ gehört. — Daher gehören zu einem (2-fachen) ausgezeichneten Werthe von der Form

$$k^2_{m+1,1} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cdot m^2$$

die ausgezeichneten Lösungen

$$A_{1,m+1} \cos\frac{m\pi y}{a} + A_{m+1,1} \cos\frac{m\pi x}{a},$$

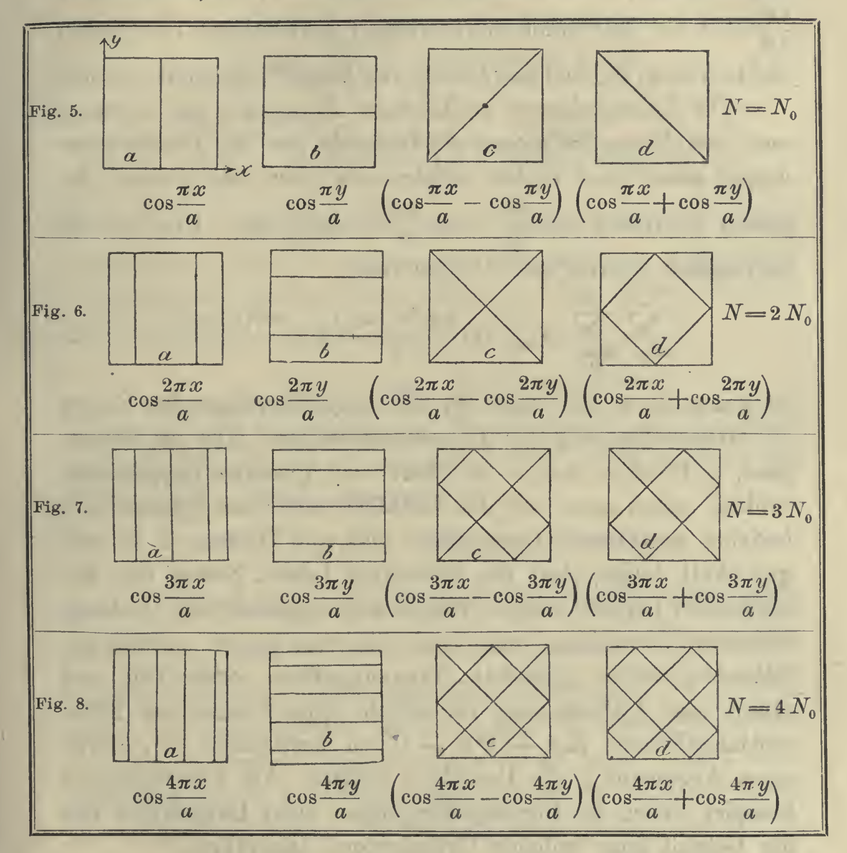
d. h. es giebt bei der Grenzbedingung $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$, also z. B. für eine quadratische *geschlossene Luftplatte*, Schwingungsformen, welche *eine einfache Ueberlagerung* derjenigen sind, die für einen parallel der X-Axe bezw. parallel der Y-Axe unbegrenzten Parallelstreifen von der Breite a möglich wären, was bei Membranen oder offenen Luftplatten nicht der Fall ist. (Natürlich gilt Analoges auch für rechteckige Begrenzung, sofern $a^2 : b^2$ rational ist.) Alle Systeme von Knotenlinien, welche nicht diesen speciellen ausgezeichneten Lösungen $A_{1,m+1} u_{1,m+1} + A_{m+1,1} u_{m+1,1}$ zugehören, sind von den bei der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ auftretenden nur durch die *Lage* in Bezug auf die Begrenzung verschieden und werden erhalten, wenn man das der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ entsprechende Knotenliniensystem über die Begrenzung hinaus fortsetzt und dann die letztere um $\frac{a}{2m}$ parallel der X-Axe und um $\frac{a}{2n}$ parallel der Y-Axe verschiebt.

Die einfachsten Knotenlinien für die Fälle, in welchen $n = 0$ und $m = 1, 2, 3, 4$ ist, sind in den Figuren 5 bis 8 *a, b, c, d* dargestellt. Eine Discussion derartiger, durch

$$\cos\frac{m\pi x}{a} \pm \cos\frac{m\pi y}{a} = 0$$

*) Da dieselben aber nur ein specieller Fall der Functionen $u_{m+1,n+1}$ sind, so liegt kein Grund vor, zwei wesentlich verschiedene Arten von Lösungen zu unterscheiden, wie es in einem Referate über Arbeiten von *Kundt* und *Matthiessen* in den Fortschritten der Physik (1876, p. 307) geschehen ist.

gegebener Knotenlinien findet sich in einer Arbeit von *Matthiessen**) und in *Rayleigh's* Theorie des Schalles (I, 413—14).



Da die Grenzbedingung $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ in erster Linie für die Schwingungen geschlossener Luftplatten Bedeutung hat, so ist es vielleicht nicht überflüssig, daran zu erinnern, dass bei diesem Problem die hier immer als *Knotenlinien* bezeichneten Nulllinien der ausgezeichneten Lösungen diejenigen Curven sind, auf welchen die Amplitude der Lufttheilchen am grössten ist, so dass sie nach dem gewöhnlichen physikalischen Sprachgebrauch *Bäuche* zu nennen wären.

*) Schlömilch's Zeitschrift XXI, 38—46.

Die Normalfunctionen des Rechteckes bezw. Quadrates für die Fälle, wo an einigen Seiten $\bar{u} = 0$, an den anderen $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ ist, sind ohne Schwierigkeit herzustellen und bieten nichts Neues; sie sind ausführlich von *Kundt**) discutirt worden.

Die Entwickelungen willkürlicher Functionen von x und y nach den Normalfunctionen des Rechtecks sind die Fourier'schen doppelt unendlichen Reihen, welche nach Sinus oder Cosinus der ganzen Vielfachen von $\frac{\pi x}{a}$ und $\frac{\pi y}{b}$ fortschreiten. Um auf die *vollständige* Fourier'sche Doppelreihe

$$\sum_0^\infty{}^m \sum_0^\infty{}^n A_{m,n} \sin \frac{\pi m (x - x_m)}{a} \sin \frac{\pi n (y - y_n)}{b}$$

zu kommen, müsste man für die gegenüberliegenden Seiten die Grenzbedingung der *Periodicität* stellen. Für *ein* Seitenpaar, z. B. $x = 0$, $x = a$, lässt sich dieselbe physikalisch deuten, indem man sich das Rechteck auf einen *Cylinder* von beliebig gestaltetem Querschnitt und vom Umfang a so aufgewickelt denkt, dass die genannten beiden Seiten den Erzeugenden parallel werden und demnach gerade zur Deckung kommen; dann kann man sich die von diesen zusammenfallenden Seiten gebildete Trennungslinie fortdenken und erhält eine *Cylinderzone*, für welche eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ zu bestimmen ist, deren eines Argument x die Periode a besitzt. Als physikalisches Beispiel wären die Eigenschwingungen einer Luftschicht von der Gestalt einer solchen Cylinderzone anzuführen.

Wenn sich das Rechteck parallel der X-Axe oder der Y-Axe oder parallel beiden nach einer oder beiden Seiten *in's Unendliche erstreckt*, so werden k' oder k'' bezw. beide *ganz willkürlich*, d. h. physikalisch ausgedrückt: *es sind dann stehende Wellen von jeder Länge und Schwingungsdauer möglich.* Die Forderung eines willkürlichen Anfangszustandes (vergl. S. 4 u. 63) ergiebt dann die Darstellbarkeit einer willkürlichen Function von zwei Variabeln in einer der Formen:

---

*) *A. Kundt*, Pogg. Ann. CL. p. 177—97 und 337—56. 1873.

$$\sum_1^\infty{}_n \sin \frac{n\pi y}{b} \int_0^\infty A_n(m') \sin (m'x) dm',$$

$$\sum_1^\infty{}_m \sin \frac{m\pi x}{a} \int_0^\infty A_m(n') \sin (n'y) dn',$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty A(m', n') \sin (m'x) \sin (n'y) dm' dn',$$

worin je nach der Grenzbedingung bezw. je nach dem Gültigkeitsbereiche statt der Sinus auch Cosinus oder aus beiden zusammengesetzte Ausdrücke stehen und die unteren Grenzen der Integrale $-\infty$ statt 0 sein können.

c. *Rechtwinkliges Parallelepipedon.*

Wie die vorhergehenden Betrachtungen auf den Fall von *drei Dimensionen* zu erweitern, d. h. die ausgezeichneten Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0$$

für ein *rechtwinkliges Parallelepipedon* bei der Grenzbedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ mit für jede Grenzfläche *constantem* h zu bilden sind, bedarf wohl keiner speciellen Erörterung. Es sei aber gleich an dieser Stelle bemerkt, dass man ganz allgemein aus den bekannten Normalfunctionen $u_k'(x, y)$ irgend eines Bereiches in der XY-Ebene diejenigen eines geraden *Prismas oder Cylinders*, dessen Querschnitt jener ebene Bereich ist, dadurch ableiten kann, dass man sie mit $\sin \frac{p\pi(z-z_p)}{c}$ multiplicirt, wo c die Höhe des Prismas oder Cylinders bezeichnet und p, z_p aus den Grenzbedingungen für die beiden zur z-Axe senkrechten Endflächen nach den Formeln (24), (25) zu berechnen sind; die ausgezeichneten Werthe k^2 für einen solchen cylindrischen oder prismatischen Raum sind, wenn mit k'^2 diejenigen des Querschnitts bezeichnet werden,

$$k^2 = k'^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2.$$

Beispielsweise sind die Normalfunctionen des *Würfels* von der Kante a bei der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$:

$$u_{m,n,p} = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}\sin\frac{p\pi z}{a};$$

falls die ganzen Zahlen m, n und p alle drei von einander verschieden sind, und kein zahlentheoretisch besonderer Fall vorliegt, ist $k^2_{m,n,p} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cdot (m^2 + n^2 + p^2)$ ein *sechsfacher* ausgezeichneter Werth, weshalb jedenfalls die „Knotenflächen" $u = 0$ gleich sehr complicirt ausfallen werden.

Damit wollen wir diesen Ueberblick über diejenigen Gebiete, deren Normalfunctionen *trigonometrische Functionen* sind, vorerst beschliessen. Eine Anzahl solcher Bereiche von der Beschaffenheit, dass sich aus ihnen die bisher untersuchten durch symmetrische Wiederholung zusammensetzen lassen, wird jedoch in einem späteren Paragraphen noch zu besprechen sein, weil man ihre Normalfunctionen aus den bisher betrachteten durch ein dann zu erörterndes Princip von allgemeiner Bedeutung gewinnen kann.

§ 7. Fälle, bei welchen Bessel'sche und Kugelfunctionen zur Anwendung kommen.

a. *Kreisfläche, bezw. von je zwei concentrischen Kreisen und Radien begrenzte Gebiete.*

Vielfach behandelt ist die Integration der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ für eine ebene *Kreisfläche*, theils wegen der physikalischen Bedeutung dieses Problems (z. B. für Schwingungen einer kreisförmigen Membran, auch für die Wärmeströmung in einem Kreiscylinder, durch welches Problem *Fourier**) zuerst auf die Bessel'schen Functionen geführt wurde), theils wegen seines mathematischen Interesses als eines der einfachsten Beispiele für die Anwendung der *Bessel'schen Functionen*. — Man führt hier natürlich *Polarcoordinaten* r, φ ein, damit die Begrenzung des Gebietes durch

---

*) *Fourier*, Analytische Theorie der Wärme; deutsch von *Weinstein* (Berlin 1884); Cap. VI.

Constantsetzen einer Coordinate ($r = \bar{r}$) erhalten wird. Die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ geht dann über in

$$(26) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0.$$

Man versucht nun, derselben und der Grenzbedingung

$$h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = 0 \quad (\text{bezw. } \bar{u} = 0),$$

worin wir wieder h als Constante voraussetzen, durch Lösungen u zu genügen, welche *Producte* aus einer Function R von r allein und einer Function Φ von φ allein sind; es ergiebt sich dann für R die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$(26') \qquad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) R = 0$$

und für Φ:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \nu^2 \Phi = 0,$$

wo ν zunächst *beliebig* ist. — Man findet aus der letzteren Gleichung

$$\Phi_\nu = A_\nu \cos \nu(\varphi - \varphi_\nu),$$

wo mit φ_ν und A_ν die Integrationsconstanten bezeichnet sind. Da nun die Lösung u *eindeutig* sein soll, so muss Φ *periodisch* sein bei Vermehrung des Arguments φ um 2π, folglich sind für ν nur *ganze Zahlen* n zulässig, welche man ohne Beschränkung positiv annehmen kann. Dieses Resultat, dass

$$u = \sum_0^{\infty} {}^n A_n R_n(r) \cos n(\varphi - \varphi_n)$$

zu setzen ist, hätte man auch durch die Erwägung ableiten können, dass sich die Lösung u als periodische Function von φ jedenfalls in eine *Fourier'sche Reihe* entwickeln lässt, deren Coefficienten dann (indem man gliedweise Differentiation als zulässig ansieht) der Gleichung (26′) genügende Functionen von r sind. — Die Functionen R_n müssen im ganzen Gebiete eindeutig, endlich und stetig sein; die diesen Bedingungen genügenden Integrale von (26′) sind aber die *Bessel-schen Functionen erster Art des Argumentes kr von der Ordnung* $n = 0, 1, 2 \ldots$:

$$J_0(kr), \quad J_1(kr), \quad J_2(kr) \ldots J_n(kr) \ldots$$

Die Constanten k, also die ausgezeichneten Werthe für die Kreisfläche bei der allgemeinen Grenzbedingung, sind die Wurzeln der transcendenten Gleichungen

$$hJ_n(k\bar{r}) + kJ'_n(k\bar{r}) = 0, \quad (n = 0, 1, 2 \ldots \infty),$$

und bilden eine *doppelt unendliche Reihe*, da jede dieser Gleichungen *unendlich viele reelle Wurzeln* $k_{1,n}$, $k_{2,n} \ldots$ besitzt. Demnach sind die ausgezeichneten Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ für die Kreisfläche von der Form

$$A_{m,n} J_n(k_{m,n} r) \cos n(\varphi - \varphi_n).$$

Da φ_n willkürlich bleibt, ist jedes $k_{m,n}$ mit Ausnahme von $k_{1,0}$, $k_{2,0} \ldots k_{m,0} \ldots$ ein mindestens *zweifacher* ausgezeichneter Werth, welcher zu den beiden Normalfunctionen

$$J_n(k_{m,n} r) \cos n\varphi, \quad J_n(k_{m,n} r) \sin n\varphi$$

gehört. Dass vorstehende Functionen richtig gewählt, d. h. zu einander orthogonal sind, geht daraus hervor, dass

$$\int_0^{2\pi} \sin n\varphi \cos n\varphi \, d\varphi = 0$$

ist; eigentlich wären sie noch mit geeigneten Constanten zu multipliciren, damit, unserer Definition der Normalfunctionen entsprechend,

$$\int_0^{\bar{r}}\int_0^{2\pi} J_n^2(k_{m,n} r) \cos^2 n\varphi \, . r\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\bar{r}}\int_0^{2\pi} J_n^2(k_{m,n} r) \sin^2 n\varphi \, . r\, dr\, d\varphi = 1$$

wäre. Ob es höhere als *zwei*fache ausgezeichnete Werthe $k_{m,n}$ geben kann, lässt sich gegenwärtig nicht sagen, da die Wurzeln der transcendenten Gleichungen

$$(27) \qquad hJ_n(z) + \frac{z}{\bar{r}} J'_n(z) = 0$$

noch zu wenig untersucht sind; jedenfalls sind bis jetzt unter

den Wurzeln der specielleren Gleichungen $J_n(z) = 0$ *keine* gleichen bekannt*).

Dem zweifachen ausgezeichneten Werthe $k_{m,n}$ entsprechen als *Knotenlinien* $(m-1)$ *concentrische Kreise* von den Radien $\frac{k_{l,n}}{k_{m,n}} \cdot \bar{r}$ (wo $l = 1, 2 \ldots m-1$ ist) und n *Durchmesser*, welche von einander die *gleichen Winkelabstände* $\frac{i\pi}{n}$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ haben. Die Radien der Knotenkreise sind unter Voraussetzung der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ von *Bourget* für $n = 0, 1, 2 \ldots 5$ und $m = 1, 2, \ldots 9$ genau berechnet worden (vgl. die unten citirte Abhandlung); Figuren, welche dieselben für die einfachsten Fälle darstellen, hat *Rayleigh* in der Theorie des Schalles, I, p. 365 geliefert. — Um die entsprechende Berechnung bei der Grenzbedingung $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ oder der allgemeinen $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ durchzuführen, wären die vorhandenen ausführlichen Tabellen der Bessel'schen Functionen, z. B. die von *Hansen***), zu benutzen.

Die Veränderung, welche die Knotenlinien bei gegebenem $k_{m,n}$ erleiden können, besteht, da nur φ_n willkürlich ist, einfach in einer *Drehung des ganzen Systems um den Mittelpunkt.*

Die vollständige Lösung des Problems der Schwingungen einer kreisförmigen Membran oder Luftplatte führt auf die *Entwickelung einer willkürlichen Function von zwei Variabeln* r, φ *in die unendliche Doppelreihe*

$$(28) \qquad \sum_{0}^{\infty} {}^{n} \sum_{k_{1,n}}^{\infty} {}^{k} A_{m,n} J_n(k_{m,n} r) \cos n(\varphi - \varphi_n)$$

---

*) *Bourget* behauptet in der wesentlich experimentelle Resultate enthaltenden Abhandlung: „Mémoire sur le mouvement vibratoire des membranes circulaires“ (Ann. de l'école normale, III, 1866), dass unter allen Wurzeln der Gleichungen

$$J_0(z) = 0, \quad J_1(z) = 0 \quad \text{etc.}$$

keine zwei gleichen vorkommen könnten, giebt aber keinen Beweis dafür, sondern zeigt schliesslich nur, dass *eine und dieselbe* Gleichung $J_n(z) = 0$ keine mehrfachen Wurzeln haben kann.

**) Schriften der Sternwarte Seeberg, 1843.

für die Intervalle $0 < r < \bar{r}$, $0 < \varphi < 2\pi$, wobei die $k_{m,n}$ die Wurzeln einer Gleichung von der Form (27) sind. Speciell ist hierin die bekannte Reihendarstellung

$$\sum_{1}^{\infty}{}^{m} A_{m,n} J_n(k_{m,n} r) \tag{29}$$

für eine beliebige Function von r enthalten, bei welcher $k_{m,n}$ alle Wurzeln einer und derselben Gleichung (27) mit constantem, übrigens aber beliebigem n durchläuft, und die Coefficientenbestimmung durch die *Integraleigenschaft*

$$\int_0^{\bar{r}} J_n(k_{m,n} r)\, J_n(k_{l,n} r)\, r\, dr = 0 \quad (l \gtrless m)$$

ermöglicht wird. Diese letztere folgt unmittelbar daraus, dass auch zwei Normalfunctionen mit gemeinsamem n die Orthogonalitätseigenschaft besitzen, d. h. dass die Gleichung besteht:

$$\int_0^{\bar{r}}\int_0^{2\pi} J_n(k_{m,n} r) J_n(k_{l,n} r) \cos^2 n(\varphi - \varphi_n)\, r\, dr\, d\varphi = 0.$$

Ist $\bar{r}$ unendlich gross, so bilden die ausgezeichneten Werthe k eine *continuirliche* Mannigfaltigkeit, die alle Werthe von Null bis ∞ umfasst; denn es genügt dann ein unendlich kleiner Zuwachs von k, damit $k.\bar{r}$ von einer Wurzel der Gleichung (27) in die nächstgrössere übergeht. Die Reihe (29) wird dann zu der für alle positiven Werte r gültigen Integraldarstellung

$$\int_0^{\infty} A_n(k) J_n(kr)\, dk \tag{29'}$$

für eine willkürliche Function von r, die Doppelsumme zu der gemischten Darstellung

$$\sum_{0}^{\infty}{}^{n} \cos n(\varphi - \varphi_n) \int_0^{\infty} A_n(k) J_n(kr)\, dk \tag{28'}$$

einer in der ganzen Ebene beliebig gegebenen Function. —

Um die Normalfunctionen eines *Kreisringgebietes* zu bilden,

sind die *allgemeinen* Integrale der Differentialgleichung (26′) zu benutzen, also neben den Bessel'schen Functionen erster Art die *Bessel'schen Functionen zweiter Art* $Y_n(kr)$, das heisst diejenigen Integrale von (26′), welche für $r = 0$ unendlich gross werden ($Y_n(kr)$ wie r^{-n}, $Y_0(kr)$ wie $\log kr$); denn es ist jetzt kein Grund vorhanden, dieselben auszuschliessen (was beim Vollkreis geschehen muss, damit die Lösung im Mittelpunkte endlich bleibt). Man braucht auch eine Integrationsconstante mehr, weil jetzt *zwei* Grenzbedingungen:

$$h_1 R_n(r_1) + R_n'(r_1) = 0, \quad h_2 R_n(r_2) - R_n'(r_2) = 0$$

zu befriedigen sind. Es bedeuten r_1, r_2 die Radien des äusseren bezw. inneren Grenzkreises, h_1, h_2 zwei gegebene positive Constanten.

Die Normalfunctionen haben also die Form

$$\begin{aligned} u_{m,n} &= R_n \cos n(\varphi - \varphi_n) \\ &= \{A_{m,n} J_n(k_{m,n} r) + B_{m,n} Y_n(k_{m,n} r)\} \cos n(\varphi - \varphi_n); \end{aligned}$$

darin ist n aus demselben Grunde wie beim Vollkreise eine *ganze* (positive) Zahl. Der Werth von $k_{m,n}$ und zugleich das *Verhältniss* $A_{m,n} : B_{m,n}$ bestimmt sich aus den gerade erwähnten zwei transcendenten Gleichungen, und der absolute Werth von $A_{m,n}$ oder $B_{m,n}$ aus der Gleichung

$$\iint u_{m,n}^2 \, df = 1 \qquad \text{oder} \qquad \int_{r_2}^{r_1} R_n^2 \, r \, dr = \frac{1}{\pi};$$

dagegen bleibt auch hier φ_n *willkürlich.* — Für *specielle* Werthe von r_1 und r_2 giebt es übrigens Normalfunctionen, *in welchen keine Bessel'sche Function zweiter Art vorkommt*; denn die Normalfunction $J_n(k_{m,n} r) \cos n(\varphi - \varphi_n)$ einer *vollen* Kreisfläche bei der Randbedingung $\bar{u} = 0$ ist z. B. auch eine solche für einen *Kreisring*, der von zwei *Knotenkreisen* der Function $J_n(k_{m,n} r)$ begrenzt wird. — Die Entwickelung einer willkürlichen Function von r und φ in die Doppelreihe

$$(28'') \quad \sum^n \sum^m \{A_{m,n} J_n(k_{m,n} r) + B_{m,n} Y_n(k_{m,n} r)\} \cos n(\varphi - \varphi_n),$$

auf welche das Problem der ringförmigen schwingenden Membran führt, scheint noch nicht näher untersucht worden zu sein.

Die volle Kreisfläche und Kreisringfläche sind Grenzfälle *eines von zwei Radien und zwei concentrischen Kreisen begrenzten Flächenstückes*, welches im Folgenden kurz als *Ringsector* bezeichnet werden möge. Versucht man, für einen solchen Ringsector, welcher von den Kreisen $r = r_1$ und $r = r_2$, von den Radien $\varphi = 0$ und $\varphi = \gamma$ begrenzt sei, der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ ebenfalls durch ausgezeichnete Lösungen von der Form $R(r) . \Phi(\varphi)$ zu genügen, so wird wieder

$$\Phi = \cos \nu(\varphi - \varphi_\nu)$$

und R ein Integral der Differentialgleichung (26′); allein jetzt ist ν im Allgemeinen *keine ganze Zahl*, sondern bestimmt sich neben φ_ν aus den beiden Grenzbedingungen für $\varphi = 0$ und $\varphi = \gamma$. Lauten diese Grenzbedingungen $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ oder, was dasselbe ist,

$$h_1' u + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \text{ für } \varphi = \gamma, \quad h_2' u - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \text{ für } \varphi = 0,$$

so lassen sie sich durch Lösungen $R_\nu(r)\,\Phi_\nu(\varphi)$ offenbar *nicht* befriedigen, wenn h_1' und h_2' *Constanten* sind, sondern nur dann, wenn letzteres von $r . h_1' = h_1$ und $r . h_2' = h_2$ gilt, also h_1' und h_2' proportional mit $\frac{1}{r}$ sind. Man sieht leicht, dass Aehnliches *allgemein* beim Gebrauche krummliniger Coordinaten für solche Begrenzungslinien oder Flächen gilt, welche einer Schaar *nicht äquidistanter* Curven (hier der Radien) oder Flächen angehören, weil dann das Normalenelement dn auch von denjenigen Coordinaten abhängt, welche längs der betreffenden Begrenzungstheile *nicht* constant sind. Wir haben also folgenden Satz:

Soll sich die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ für Gebiete, deren Begrenzungscurven bezw. Flächen durch Constantsetzen irgendwelcher krummliniger Coordinaten gegeben sind, durch ausgezeichnete Lösungen integriren lassen, die ***Producte*** *aus Functionen von je einer dieser Coordinaten sind, so muss das h der Grenzbedingung für jedes Begrenzungsstück eine* ***ganz bestimmte Function*** *der längs des letzteren variabelen Coordinaten sein.*

Da es nun sehr unwahrscheinlich ist, dass bei irgend welchen physikalischen Problemen, welche die Integration der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ für Gebiete der bezeichneten Art erfordern, die Grösse h (also z. B. bei Wärmeproblemen das Verhältniss der äusseren zur inneren Leitungsfähigkeit) gerade in jener speciellen Weise längs der Begrenzung variirt, so ist es wohl berechtigt, wenn wir uns in solchen Fällen *auf die Grenzbedingungen* $\bar{u} = 0$ *und* $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ *beschränken,* welche sowohl physikalisch die wichtigsten sind, als auch die Integration von $\Delta u + k^2 u = 0$ durch Producte gestatten. — Nach dieser allgemeinen Bemerkung kehren wir zur Herstellung der Normalfunctionen für den Ringsector zurück.

Soll längs der Radien $\varphi = 0$ und $\varphi = \gamma$ die Function u selbst verschwinden, so ist zu setzen:

$$\nu \varphi_\nu = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{n\pi}{\gamma},$$

wo n eine (positive) ganze Zahl ist, also

$$\Phi_\nu = \sin \frac{n\pi}{\gamma} \varphi;$$

soll dagegen $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ sein, so muss $\varphi_\nu = 0$ gesetzt werden, während ν dieselben Werthe erhält; es ist dann

$$\Phi_\nu = \cos \frac{n\pi}{\gamma} \varphi.$$

Im letzteren Falle ist im Gegensatze zum ersten auch der Werth $n = 0$ zulässig, welchem die von φ und somit von der Grösse des Winkels γ *unabhängigen* Normalfunctionen

$$A_0 J_0(kr) + B_0 Y_0(kr)$$

entsprechen. In beiden Fällen sind die Functionen R_ν für $\nu > 0$ von der Form

$$A_\nu J_\nu(kr) + A_{-\nu} J_{-\nu}(kr),$$

wenn man mit J_ν und $J_{-\nu}$ die Bessel'schen Functionen von der gebrochenen Ordnungszahl $\pm \nu = \pm \frac{n\pi}{\gamma}$ bezeichnet, welche durch dieselbe unendliche Potenzreihe, wie J_n, definirt werden können, nämlich durch:

$$J_\nu(\varrho) = \frac{\varrho^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \left\{ 1 - \frac{\varrho^2}{2(2\nu+2)} + \frac{\varrho^4}{2.4.(2\nu+2)(2\nu+4)} - \cdots \right\}.$$

In dem vorliegenden Falle eines *gebrochenen* ν erhält man somit das im Nullpunkte unendlich gross werdende Integral von (26′) einfach durch Vertauschung von ν mit $-\nu$; dementsprechend ist dasselbe oben auch mit $J_{-\nu}$ statt Y_ν bezeichnet worden. — Die Bestimmung des Verhältnisses $A_\nu : A_{-\nu}$ und der ausgezeichneten Werthe $k_{m,\nu}$ aus den Grenzbedingungen für $r = r_1$ und $r = r_2$ gestaltet sich genau ebenso, wie beim Kreisringgebiet. Die ausgezeichneten Werthe sind hier im Allgemeinen alle *einfach*, die Knotenlinien sind *concentrische Kreise und Radien*, welche letzteren mit einander die *gleichen Winkel* $\frac{\gamma}{n}$ einschliessen. Ist der Winkel γ klein und $r_1 : r_2$ nicht sehr von 1 verschieden, so bietet demnach das Knotenliniensystem ungefähr denselben Anblick dar, wie beim *Rechteck*, welches letztere ja auch geradezu als ein *Grenzfall* des Ringsectors angesehen werden kann.

Dass die Anzahl der *Radien*, welche Knotenlinien sind, $n - 1$ beträgt, wenn $\nu = \frac{n\pi}{\gamma}$ ist, erkennt man ohne Weiteres, und dass bei constantem ν die Anzahl der *Knotenkreise* $0, 1, 2 \ldots m-1 \ldots$ ist, wenn man für k der Reihe nach die erste (kleinste), zweite ... m^{te} ... Wurzel der durch die Grenzbedingungen für $r = r_1$ und $r = r_2$ gelieferten transscendenten Gleichung setzt, kann daraus geschlossen werden, dass die Differentialgleichung (26′), deren Integral

$$A_\nu J_\nu(k_{m,\nu} r) + A_{-\nu} J_{-\nu}(k_{m,-\nu} r)$$

ist, eine specielle *Sturm'sche* Differentialgleichung ist. In der That ist, wenn man (26′) in die Form setzt:

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dR}{dr}\right) + \left(k^2 r - \frac{\nu^2}{r}\right) R = 0,$$

sowohl die früher mit a_{11} bezeichnete Grösse, als der Factor von $k^2 R$ (d. i. das frühere a_1) im ganzen Intervall der Variabeln r *positiv*, und somit sind die Sturm'schen Sätze anwendbar. — Wir kennen jetzt also eine doppelt unendliche Reihe von Normalfunctionen des Ringsectors, deren Knoten-

linien 0, 1, 2 ... ∞ Radien und 0, 1, 2 ... ∞ Kreise (in allen möglichen Combinationen jener Zahlen) sind, aber wir wissen noch nicht, ob dieselbe auch *alle* Normalfunctionen des Ringsectors enthält, weil die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Function von r und φ nach Bessel'schen Functionen von gebrochener Ordnung ν, multiplicirt mit $\frac{\cos}{\sin}\nu\varphi$, bisher nicht mathematisch behandelt ist; es könnte ja ausserdem Normalfunctionen geben, welche *nicht* Producte $R(r).\Phi(\varphi)$ sind. Die *Vollständigkeit* des von uns gewonnenen Systems schliessen wir nun aber aus der soeben besprochenen Beschaffenheit der Knotenlinien auf Grund der Hypothese, dass sich die ausgezeichneten Werthe von k^2 und im Allgemeinen auch die Knotenlinien bei stetiger Aenderung der Begrenzung und Beibehaltung der Grenzbedingungen ebenfalls *stetig ändern.* Hiernach werden also, wenn man den Ringsector in ein *Rechteck* übergehen lässt, die $n-1$ Radien in $n-1$ Parallele zu dessen einer Seite, die $m-1$ Knotenkreise in eben so viele Parallele zur anderen Seite übergehen; für das Rechteck ist aber bekannt, dass die durch diese Knotenlinien bei allen möglichen Combinationen von m und n charakterisirten Normalfunctionen die *sämmtlichen möglichen* sind, und da bei dem stetigen Uebergange keine Normalfunction verloren gehen oder gewonnen werden kann, so folgt hieraus die Vollständigkeit unseres Systems auch für den Ringsector. — Eine *unstetige* Aenderung der Knotenlinien würde allerdings eintreten können, sobald zwei ausgezeichnete Werthe *einander gleich* würden; allein der Uebergang lässt sich ohne Zweifel immer so ausführen, dass dies vermieden wird. — Das im Vorhergehenden benutzte *Continuitätsprincip* wurde von *F. Klein* in seiner Vorlesung „über partielle Differentialgleichungen der Physik" (Sommer 1889) in der allgemeinen Fassung ausgesprochen:

*Wenn ein mechanisches System stetig geändert wird, so ändert sich hierbei jede Wurzel k^2 der determinirenden Gleichung**)

---

*) Diese Wurzeln sind bei Systemen von unendlich vielen Graden der Freiheit eben diejenigen Werthe k^2, welche wir *ausgezeichnete* nennen.

ebenfalls stetig, und wenn man man nur etwaige vielfache Wurzeln mit der richtigen Multiplicität zählt, so geht bei der Aenderung keine jener Wurzeln verloren und es wird keine dabei gewonnen.

Wenn γ ein *aliquoter Theil von* π ist, so werden die sämmtlichen ν *ganze* Zahlen, und man erhält specielle Fälle der Normalfunctionen des *Kreisringes*, was auch unmittelbar daraus hervorgeht, dass dann die den Ringsector begrenzenden Radien *Knotenlinien* des vollen Ringes sind, und dass man Knotenlinien jederzeit durch feste Begrenzungen ersetzen kann, ohne den Schwingungszustand zu ändern.

Um die vollständigen Normalfunctionen des *Ringes* als Grenzfall des Ringsectors abzuleiten, hat man $\gamma = 2\pi$ zu setzen und an die Stelle der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ bei $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ die *Bedingung der Periodicität* treten zu lassen, um nämlich den Zusammenhang des Ringes durch Verschmelzung der ursprünglichen geradlinigen Grenzen herstellen zu können. Uebrigens sind die Normalfunctionen des Kreisringes identisch mit der Gesammtheit derjenigen Normalfunctionen eines Ringsectors vom Winkel π, welche man erhält, wenn man längs beider begrenzenden Radien erstens $\bar{u} = 0$, zweitens $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ vorschreibt; denn man kann offenbar jede Normalfunction des Kreisringes in zwei Theile zerlegen, welche in Bezug auf einen und denselben beliebig gewählten Durchmesser antisymmetrisch bezw. symmetrisch sind. — Zum *Vollkreis* endlich gelangt man, wenn man $r_2 = 0$ werden lässt und nicht mehr fordert, dass bei diesem Grenzübergange $\left(hu - \frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=r_2} = 0$ bleibt, sondern dass der Nullpunkt schliesslich *kein singulärer Punkt* wird, d. h. dass u in demselben endlich und nebst seinen ersten Derivirten stetig ist.

Die Grenzbedingung der Periodicität hat übrigens auch im Falle eines beliebigen *gebrochenen* ν eine anschauliche Bedeutung. Denn man kann sich, ohne dass die Differentialgleichung und ihre ausgezeichneten Lösungen eine Aenderung erleiden, den Ringsector auf einen *Kegelmantel*

so aufgewickelt denken, dass die Radien in die geradlinigen Erzeugenden des Kegels fallen. Wählt man nun die Oeffnung des Kegels (den wir uns als Kreiskegel vorstellen wollen, obwohl dies nicht gerade nothwendig ist) von geeigneter Grösse, so kommen die Ränder $\varphi = 0$ und $\varphi = \gamma$ zur Deckung, und wenn man für dieselben jetzt die Bedingung der Periodicität von u (oder von Φ) vorschreibt, so erhält man die *Normalfunctionen einer Kegelzone* in der Form

$$\{A_\nu J_\nu(kr) + A_{-\nu} J_{-\nu}(kr)\} \cos \nu(\varphi - \varphi_\nu),$$

wo $\nu = \frac{2n\pi}{\gamma}$ und φ_ν willkürlich ist. Dieselben würden z. B. die freien Schwingungsarten einer dünnen *Luftschicht* von der Gestalt einer Kegelzone darstellen. Da immer auch der Werth $n = 0$ zulässig ist, so sind die durch

$$A_0 J_0(k_{m,0} r) + B_0 Y_0(k_{m,0} r)$$

dargestellten Schwingungsformen, bei welchen die Bewegung ausschliesslich *längs der Erzeugenden* des Kegels stattfindet, und die ihnen entsprecheuden Tonhöhen ganz *unabhängig von der Oeffnung des Kegels.*

Besonders einfach und interessant sind, wie *Rayleigh**) hervorgehoben hat, die Normalfunctionen derjenigen Sectoren, für welche γ ein *aliquoter Theil von* 2π, aber *nicht* von π ist. Es genügt hier, den Fall $\gamma = 2\pi$ zu betrachten, weil er alle die anderen umfasst; das Gebiet ist dann ein *längs eines Radius* $\varphi = 0$ *aufgeschnittener Kreisring oder Vollkreis.* (*Rayleigh* beschränkt sich auf letzteren.) Die Normalfunctionen sind von der Form:

$$\left\{A_{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(kr) + A_{-\frac{n}{2}} J_{-\frac{n}{2}}(kr)\right\} \Phi_{\frac{n}{2}},$$

wobei $\Phi_{\frac{n}{2}}$ je nach der für $\varphi = 0$ gestellten Grenzbedingung $= \sin\frac{n}{2}\varphi$ oder $\cos\frac{n}{2}\varphi$ ist. Da die geraden Werthe von n nichts Neues liefern, haben wir jetzt die *ungeraden* zu be-

*) l. c. I. p. 367—369.

trachten und wollen daher $n + \frac{1}{2}$ statt n schreiben, um jetzt dem neuen n *alle* ganzzahligen Werthe beilegen zu können. Die Functionen

$$J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \quad \text{und} \quad J_{-n-\frac{1}{2}}(kr)$$

zeichnen sich nun vor allen anderen Bessel'schen Functionen dadurch aus, dass sie sich *durch eine endliche Anzahl von Gliedern darstellen lassen*, die keine höheren Transcendenten als *trigonometrische Functionen* enthalten. Dies folgt daraus, dass die bekannte halbconvergente Reihe für $J_\nu(\varrho)$:

$$J_\nu(\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}}\left\{1 - \frac{(1^2-4\nu^2)(3^2-4\nu^2)}{1.2.(8\varrho)^2} + \cdots\right\}\cos\left(\varrho - \frac{\pi}{4} - \nu\frac{\pi}{2}\right)$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}}\left\{\frac{1^2-4\nu^2}{1.8\varrho} - \frac{(1^2-4\nu^2)(3^2-4\nu^2)(5^2-4\nu^2)}{1.2.3.(8\varrho)^3}\right.$$
$$\left. + \cdots\right\}\sin\left(\varrho - \frac{\pi}{4} - \nu\frac{\pi}{2}\right),$$

in welcher die Summe der N ersten Glieder sich von $J_\nu(\varrho)$ stets um weniger als den Betrag des letzten einbegriffenen (N^{ten}) Gliedes unterscheidet, mit einer endlichen Anzahl von Gliedern *abbricht*, falls 2ν eine *ungerade* (positive oder negative) *ganze Zahl* ist. Setzt man also $\nu = n + \frac{1}{2}$, so ergiebt sich für $J_{n+\frac{1}{2}}$ der genaue Ausdruck

$$(30)\begin{cases} J_{n+\frac{1}{2}}(\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{1 - \frac{n(n+1).[n(n+1)-1.2]}{1.2.(2\varrho)^2}\right. \\ + \frac{n(n+1)[n(n+1)-1.2][n(n+1)-2.3].[n(n+1)-3.4]}{1.2.3.4(2\varrho)^4} \\ \left. - \cdots\right\}\frac{\sin\left(\varrho - \frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{\varrho}} \\ + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{n(n+1)}{1.2\varrho} - \frac{n(n+1)[n(n+1)-1.2][n(n+1)-2.3]}{1.2.3.(2\varrho)^3}\right. \\ \left. + \cdots\right\}\frac{\cos\left(\varrho - \frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{\varrho}}. \end{cases}$$

Vertauscht man n mit $-n-1$, so ändern sich die Reihen

innerhalb der geschweiften Klammern gar nicht und man erhält:

$$(30\text{a})\begin{cases} J_{-n-\frac{1}{2}}(\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot(-1)^n\{1-\cdots\}\dfrac{\cos\left(\varrho-\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{\varrho}} \\ \qquad -\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)^n\left\{\frac{n(n+1)}{2\varrho}-\cdots\right\}\dfrac{\sin\left(\varrho-\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{\varrho}}. \end{cases}$$

Die durch diese endlichen Reihen definirten Functionen sollen, obschon sie sich nur aus trigonometrischen Functionen und Potenzen von ϱ zusammensetzen, doch auch weiterhin als *Bessel'sche* Functionen von der Ordnung $\pm(n+\frac{1}{2})$ bezeichnet werden; sie spielen auch bei der Integration der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ im Raume von drei Dimensionen eine hervorragende Rolle. Die einfachsten von ihnen sind:

$$(30\text{b})\begin{cases} J_{+\frac{1}{2}}(\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{\sin\varrho}{\sqrt{\varrho}}, \\ J_{+\frac{3}{2}}(\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}}\left(\dfrac{\sin\varrho}{\varrho}-\cos\varrho\right), \\ J_{+\frac{5}{2}}(\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}}\left(3\dfrac{\sin\varrho}{\varrho^2}-3\dfrac{\cos\varrho}{\varrho}-\sin\varrho\right), \\ J_{-\frac{1}{2}}(\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\dfrac{\cos\varrho}{\sqrt{\varrho}}, \\ J_{-\frac{3}{2}}(\varrho) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}}\left(\dfrac{\cos\varrho}{\varrho}+\sin\varrho\right), \\ J_{-\frac{5}{2}}(\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}}\left(3\dfrac{\cos\varrho}{\varrho^2}+3\dfrac{\sin\varrho}{\varrho}-\cos\varrho\right). \end{cases}$$

Für einen längs eines Radius aufgeschnittenen *Vollkreis* mit der Grenzbedingung $\bar{u}=0$ längs der Peripherie $r=\bar{r}$ und längs der Schnittlinie $\varphi=0$, also z. B. für eine *Membran mit einem befestigten Radius*, sind demnach die Normalfunctionen mit der geringsten Zahl (0 bezw. 2) radialer Knotenlinien:

$$A\frac{\sin kr}{\sqrt{kr}}\sin\tfrac{1}{2}\varphi \quad \text{und} \quad \frac{A}{\sqrt{kr}}\left(\frac{\sin kr}{kr}-\cos kr\right)\sin\tfrac{3}{2}\varphi.$$

Die ausgezeichneten Werthe von k für die erste Reihe sind $= \frac{m\pi}{\bar{r}}$ $(m = 1, 2, 3 \ldots)$, die entsprechenden Knotenlinien daher Kreise, welche den Radius in *n gleiche Abschnitte* theilen; die zu den Normalfunctionen von der zweiten angegebenen Form gehörenden Werthe k sind die Wurzeln der auch sonst häufig vorkommenden transcendenten Gleichung

$$\operatorname{tg} k\bar{r} = k\bar{r},$$

von welchen die sechs ersten z. B. bei *Rayleigh**) angegeben sind. — Die Bedingung $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ für $\varphi = 0$ hat Geltung bei den Schwingungen einer *kreisförmigen Luftplatte mit einer festen Scheidewand längs des Radius* $\varphi = 0$**); die Normalfunctionen sind dann $A_n J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \cos \frac{n\varphi}{2}$.

Nach dem am Schlusse des vorigen Paragraphen Gesagten bedarf es keiner näheren Erörterung, wie man mit Hülfe der Normalfunctionen des Kreises, Kreissectors etc. diejenigen eines geraden *Kreiscylinders*, *Cylinderausschnittes* etc. durch Multiplication der ersteren mit einer trigonometrischen Function von z erhält; es sei nur daran erinnert, dass gerade die Normalfunctionen des Kreiscylinders eine hervorragende physikalische Bedeutung haben, so namentlich für Luftschwingungen in Röhren, auch für Schwingungen cylindrischer elastischer Körper, sowie für die nicht stationäre Wärmeströmung in Cylindern.

b. *Kugeloberfläche bezw. von je zwei Meridianen und Parallelkreisen begrenzte Gebiete auf derselben.*

Die bisher behandelten ebenen Gebiete mit vier Begrenzungslinien können als Grenzfälle solcher *krummliniger Vierecke auf einer Kugelfläche* aufgefasst werden, *deren Begrenzung von Stücken zweier Breitenkreise und zweier Meridiane* gebildet wird. Lässt man den Radius der Kugel unendlich gross werden und betrachtet dabei ein solches Viereck

---

*) l. c. I, p. 369.

**) Cf. *Rayleigh*, l. c. II, p. 347—48.

unendlich nahe am Pole, so geht dasselbe in ein ebenes Gebiet von der Art, wie es oben als *Ringsector* bezeichnet wurde, über; liegt das beim Grenzübergang auf der Kugel betrachtete Viereck aber in endlicher Entfernung vom Pole, so wird es zu einem gewöhnlichen *Rechteck*. —

Wir wollen uns nun mit den Normalfunctionen*) der bezeichneten sphärischen Curvenvierecke beschäftigen, welche sich physikalisch durch die *Eigenschwingungen einer homogenen dünnen Luftschicht von jener Gestalt* veranschaulichen lassen und nachstehender Differentialgleichung genügen:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0; \tag{31}$$

man erhält dieselbe, wenn man u in der in Polarcoordinaten r, ϑ, φ transformirten Gleichung $\Delta u+k^2u=0$ als *von r unabhängig* annimmt und r *constant*, z. B. $=1$ setzt.

Führt man die *rechtwinkligen Coordinaten ξ, η in der Aequatorebene* ein, auf welche die Kugelfläche mit dem Radius 1 vom Pole $\vartheta=\pi$ aus *stereographisch projicirt* sei, so ist

$$\xi=\frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{1+\cos\vartheta},\quad \eta=\frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{1+\cos\vartheta},$$

und es geht die vorstehende Differentialgleichung in

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{4k^2}{(1+\xi^2+\eta^2)^2}u=0 \tag{31'}$$

über, weil das lineare *Vergrösserungsverhältniss* bei der durch die stereographische Projection hergestellten conformen Abbildung $\frac{1+\xi^2+\eta^2}{2}$ ist**). Das zu betrachtende sphärische Viereck wird in der $\Xi\mathrm{H}$-Ebene auf einen *Ringsector* abgebildet.

---

*) Wenn schlechthin von den „Normalfunctionen eines Gebietes" die Rede ist, so sollen darunter immer die (ev. specialisirten) ausgezeichneten Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u+k^2u=0$ mit *constantem* Factor von u *oder derjenigen Differentialgleichung, welche man aus dieser durch Einführung krummliniger Coordinaten erhält*, verstanden sein, also diejenigen Functionen, welche z. B. den Eigenschwingungen einer *homogenen, gleichförmig gespannten* Membran oder einer *homogenen* Luftmasse (bezw. Luftschicht von constanter Dicke) von der gegebenen Gestalt entsprechen.

**) Cf. I, (Vorkommen der Differentialgleichung), B; § 4. S. 28—30.

Man könnte daher statt der ausgezeichneten Lösungen von (31) für jenes sphärische Viereck diejenigen von

$$\Delta u + \left(\frac{2}{1+\xi^2+\eta^2}\right)^2 k^2 u = 0$$

für den Ringsector untersuchen.

Die der Differentialgleichung (31) genügenden Functionen sind die sog. *Kugelflächenfunctionen* (*surface spherical harmonics*) *im allgemeinsten Sinne*; multiplicirt man sie mit r^μ, wo $\mu = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4k^2}$ ist, so erhält man homogene Functionen μ^{ten} Grades von x, y, z, welche der *Differentialgleichung des Potentials im Raume von drei Dimensionen* genügen: die allgemeinsten *räumlichen Kugelfunctionen* (*solid sperical harmonics*). Man sieht demnach, in wie engem Zusammenhange gerade die gegenwärtige Untersuchung mit der Potentialtheorie steht, worauf übrigens ja schon in § 1. e und insbesondere in § 5 des I. Theiles hingewiesen wurde.

Um die Normalfunctionen für das von den Meridianen $\varphi = 0$, $\varphi = \gamma$ und den Breitenkreisen $\vartheta = \vartheta_1$, $\vartheta = \vartheta_2$ begrenzte sphärische Viereck zu finden, setze man in (31)

$$u = \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi);$$

dann ergiebt sich

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \nu^2\Phi = 0,$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\sin^2\vartheta}\right)\Theta = 0,$$

worin ν eine vorläufig willkürliche Constante bezeichnet. Folglich ist zunächst wieder

$$\Phi_\nu = \cos\nu(\varphi - \varphi_\nu),$$

gerade wie bei dem im Abschnitte a. dieses Paragraphen behandelten Probleme.

Das vollständige Integral der Differentialgleichung für Θ ist von der Form

$$\Theta = A_{\mu,\nu}\Pi_{\mu,\nu}(\vartheta) + A_{\mu,-\nu}\Pi_{\mu,-\nu}(\vartheta),$$

worin die Function $\Pi_{\mu,\nu}$ durch folgende nach Potenzen von $\sin\vartheta = \varrho$ fortschreitende Reihe definirt ist:

$$\Pi_{\mu,\nu}(\vartheta) = \varrho^\nu \left\{1 + \frac{\nu(\nu+1)-k^2}{2(2\nu+2)}\varrho^2 \right.$$
$$\left. + \frac{\nu(\nu+1)-k^2}{2(2\nu+2)} \cdot \frac{(\nu+2)(\nu+3)-k^2}{4(2\nu+4)}\varrho^4 + \cdots\right\}$$

oder, wenn man $k^2 = \mu(\mu+1)$ setzt,

$$\Pi_{\mu,\nu}(\vartheta) = \varrho^\nu \left\{1 + \frac{(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)}{2(2\nu+2)}\varrho^2 \right.$$
$$\left. + \frac{(\nu-\mu)(\nu-\mu+2)(\nu+\mu+1)(\nu+\mu+3)}{2 \cdot 4 \cdot (2\nu+2)(2\nu+4)}\varrho^4 + \cdots\right\} {}^{*)}.$$

Diese Reihe hat grosse Aehnlichkeit mit der Potenzreihe für $J_\nu(\varrho)$; man erhält auch, ebenso wie $J_{-\nu}$ aus $J_{+\nu}$, die Function $\Pi_{\mu,-\nu}$ aus $\Pi_{\mu,+\nu}$ durch einfache Vertauschung von ν mit $-\nu$, falls ν keine ganze Zahl ist. Die willkürlichen Constanten ν, μ, $A_{\mu,\nu} : A_{\mu,-\nu}$ sind so zu bestimmen, dass die Grenzbedingungen befriedigt werden. Diese Bestimmung ist genau ebenso durchzuführen, wie beim Ringsector in der Ebene; die Normalfunctionen sind also von der Form

$$(32) \qquad \left\{A_{\mu,\nu}\Pi_{\mu,\nu}(\vartheta) + A_{\mu,-\nu}\Pi_{\mu,-\nu}(\vartheta)\right\} \frac{\cos}{\sin}\left(n\frac{\pi}{\gamma}\varphi\right),$$
$$(n = 0, 1, 2 \ldots \infty),$$

wobei $A_{\mu,\nu} : A_{\mu,-\nu}$ und μ, also auch die ausgezeichneten Werthe $k^2_{\mu,\nu}$, aus den transcendenten Gleichungen

$$h_1\Theta_{\mu,\nu}(\vartheta_1) + \Theta'_{\mu,\nu}(\vartheta_1) = 0,$$
$$h_2\Theta_{\mu,\nu}(\vartheta_2) - \Theta'_{\mu,\nu}(\vartheta_2) = 0$$

zu berechnen sind. Wenn man, entsprechend der obigen Definition, die Functionen (32) als *allgemeine Kugelflächenfunctionen* bezeichnet, so würde die Zahl μ deren *Grad* angeben. Die hier vorliegenden Kugelfunctionen von gebrochenem Grade hat wohl zuerst *W. Thomson* eingeführt**).

Selbstverständlich sind die zu obigen Normalfunctionen gehörigen „Knotenlinien" *Breitenkreise und Meridiane,* welche letzteren von einander die gleichen Winkelabstände $\frac{\gamma}{n}$ haben.

---

*) Cf. *Rayleigh,* l. c. II, p. 339, wo s, n, h, ν statt der hier gebrauchten ν, μ, k, ϱ stehen.

**) *Thomson* und *Tait,* Natural Philosophy, Appendix B. 1867.

Dabei ist jede Normalfunction durch eine bestimmte Anzahl von Breitenkreisen ($m - 1$, wenn μ der Grösse nach die m^{te} Wurzel der obigen transcendenten Gleichungen ist) und von Meridianen ($n - 1$, wenn $\nu = \frac{n\pi}{\gamma}$ ist) charakterisirt, und es kommen, wenn man die Gesammtheit aller Normalfunctionen betrachtet, gerade alle Combinationen von $m = 0, 1, 2 \ldots \infty$ und $n = 0, 1, 2 \ldots \infty$ vor. Für n sieht man dies sofort, für m folgt es daraus, dass auf die Integrale der Differentialgleichung, welcher Θ_ν genügt, und welche man schreiben kann

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{(1 - z^2)\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right\} + \left\{k^2 - \frac{\nu^2}{1 - z^2}\right\}\Theta = 0, \quad (z = \cos\vartheta),$$

die *Sturm'schen* Schlüsse anwendbar sind, wenn man ν als constant und k^2 oder, was dasselbe ist, μ als variabel betrachtet und die den Polen entsprechenden Werthe $z = \pm 1$ ausschliesst.

Die *Vollständigkeit* des gewonnenen Systems von Normalfunctionen würde durch eine analoge Betrachtung zu erschliessen sein, wie beim ebenen Ringsector; man würde das sphärische Viereck dabei am zweckmässigsten in einen *Kugeloctanten* übergehen lassen (K.), dessen Normalfunctionen vollständig bekannt sind und als Knotenlinien ebenfalls je $m - 1$ Parallelkreise und $n - 1$ Meridiane besitzen (vergl. § 9 dieses Theiles).

Mehrfache ausgezeichnete Werthe werden, nach Analogie des Rechtecks zu schliessen, für ein von Parallelkreisen und Meridianen begrenztes sphärisches Viereck nur bei speciellen Verhältnissen der Bögen ϑ_1, ϑ_2 und γ existiren.

Ist das Gebiet eine *Kugelzone*, also $\gamma = 2\pi$ und die für $\varphi = 0$ oder $= 2\pi$ zu erfüllende Bedingung die der *Periodicität* von Φ, so werden, genau wie beim Kreisringe, alle ausgezeichneten Werthe, ausser den zu $\nu = 0$ ($n = 0$) gehörenden, *zweifach*. Da dann ν die *ganzzahligen* Werthe n annimmt, ist $\Pi_{\mu, -\nu}$ nicht mehr durch dieselbe Reihe definirbar, wie $\Pi_{\mu, +\nu}$. Man kann aber die vollständige Lösung Θ durch die (ebenfalls bei *Rayleigh* angegebenen) nach Potenzen von $\cos\vartheta = z$ fortschreitenden Reihen darstellen:

$$A(1-z^2)^{\frac{1}{2}\nu}\left\{1+\frac{(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)}{1\,.\,2}z^2\right.$$
$$\left.+\frac{(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)(\nu-\mu+2)(\nu+\mu+3)}{4!}z^4+\cdots\right\}$$
$$+B(1-z^2)^{\frac{1}{2}\nu}\left\{z+\frac{(\nu-\mu+1)(\nu+\mu+2)}{3!}z^3+\cdots\right\}.$$

Enthält das Gebiet den einen *Pol* ($\vartheta = 0$) in sich, ist es also eine *Kugelcalotte*, so sind die Normalfunctionen:

$$A_{\mu,n}\,\Pi_{\mu,n}(\vartheta)\,.\,\cos n(\varphi-\varphi_n)\,,$$

wobei μ eine Wurzel der transcendenten Gleichung ist:

$$h_1\,\Pi_{\mu,n}(\vartheta_1)+\Pi'_{\mu,n}(\vartheta_1)=0.$$

Hier, wie auch bei der Kugelzone, muss jedoch die beschränkende Voraussetzung gemacht werden, dass $\vartheta_1 < \frac{\pi}{2}$ ist, weil für $\varrho = 1$ die Reihe für Π nicht mehr convergirt; man müsste also im Falle $\vartheta_1 > \frac{\pi}{2}$ eine andere Form der Lösung Θ benutzen. Die obigen Reihen nach Potenzen von z wären wohl brauchbar für eine den Aequator umfassende Zone, aber nicht für eine Calotte, weil sie in den Polen ($z = \pm 1$) divergiren*).

Endlich gelangen wir, indem wir $\vartheta_1 = \pi$ werden lassen und jetzt statt der früheren Grenzbedingungen *nur Eindeutigkeit, Endlichkeit und Stetigkeit* der Lösungen von (31) fordern, zum Falle der *vollen Kugelfläche*, welcher mathematisch das grösste Interesse bietet. — In *W. Thomson's* schon erwähntem Appendix B, sowie in *Rayleighs* „Theorie des Schalles" (II, p. 329 ff.) wird gezeigt, dass die auf voriger Seite angeführte Reihe nach Potenzen von z in den Polen, d. h. für

---

*) Ueber die verschiedenen möglichen Reihendarstellungen der Kugelfunctionen vergl. *R. Olbricht,* Studien über die Kugel- und Cylinderfunctionen, Leipziger Dissertation 1887, worin auch der Verlauf der gewöhnlichen Kugel- und Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art im Reellen anschaulich discutirt wird. — Im Uebrigen findet sich die ausführlichste Darstellung der Theorie der Kugelfunctionen selbstverständlich in *Heine's* „Handbuch der Kugelfunctionen", 2. Aufl., Berlin, 1878.

$z = \pm 1$, nur dann noch convergirt, wenn $\mu - \nu$ eine ganze positive Zahl und ausserdem $A = 0$ ist, falls diese Zahl ungerade, und $B = 0$, falls sie gerade ist. Da nun aus demselben Grunde, wie schon bei der Kugelzone, ν eine *ganze* Zahl sein muss, so folgt, dass *für die volle Kugelfläche auch* μ, *d. h. der Grad der Kugelfunctionen, nothwendig eine positive ganze Zahl* ($> \nu$) *ist.* Dasselbe Resultat hat *F. Klein* in seiner Vorlesung über partielle Differentialgleichungen der Physik durch folgende Betrachtung abgeleitet. Jede Lösung von (31), worin $k^2 = \mu(\mu + 1)$ gesetzt sei, giebt mit r^μ multiplicirt eine der Gleichung $\Delta V = 0$ im Raume von drei Dimensionen genügende Function, also ein Newton'sches *Potential*; ist der Bereich, für welchen (31) zu integriren ist, die volle Kugelfläche, so erhält man also ein Potential für deren ganzen Innenraum. Soll nun die Lösung von (31) auf der ganzen Kugelfläche endlich und stetig sein, so muss dasselbe von jenem Potential gelten. Dasselbe lässt sich daher nach Potenzen von x, y, z mit ganzen positiven Exponenten entwickeln; da es aber r nur in dem Factor r^μ enthält, so können in dieser Entwickelung keine anderen Exponenten, als solche, deren Summe $= \mu$ ist, vorkommen; folglich *muss* μ *eine ganze positive Zahl sein.* Das erwähnte Potential ist dann eine *räumliche Kugelfunction im engeren Sinne.*

Die Grössen μ, welche bisher die Wurzeln einer transcendenten Gleichung waren, und damit die ausgezeichneten Werthe $k^2 = \mu(\mu + 1)$, bestimmen sich also für die volle Kugelfläche *allein aus den Stetigkeitsbedingungen.* Um daran zu erinnern, dass μ und ν jetzt positive ganze Zahlen sind (0 inclusive), soll dafür von nun an m und n gesetzt werden.

Die ausgezeichneten Lösungen der Differentialgleichung (31) für die volle Kugelfläche sind identisch mit den *Kugelflächenfunctionen im engeren Sinne*, die gewöhnlich schlechtweg Kugelfunctionen, auch *Laplace'sche* Functionen, und von den Engländern „*complete surface spherical harmonics*“ genannt werden; denn dieselben werden gewöhnlich definirt als die auf

der ganzen Kugelfläche endlichen, stetigen, eindeutigen Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+m(m+1)u=0.$$

In dem Ausdruck (32) ist dabei $A_{\mu,-\nu}=0$ zu setzen, während $\Pi_{\mu,\nu}$ in die gewöhnlich mit $P_{m,n}(\cos\vartheta)$ bezeichnete und *„zugeordnete Kugelfunction“* des Argumentes $\cos\vartheta = z$ genannte Function übergeht. Dieselbe wird am einfachsten definirt durch die Gleichung:

$$\mathrm{P}_{m,n}(z)=C_n(1-z^2)^{\frac{n}{2}}\frac{d^n P_m(z)}{dz^n},$$

und $P_m = P_{m,0}$ durch:

$$P_m(z)=C_0\frac{d^m(z^2-1)^m}{dz^m}.$$

P_m ist eine ganze rationale Function m^{ten} Grades von $\cos\vartheta$, $P_{m,n}$ eine solche $(m-n)^{\text{ten}}$ Grades multiplicirt mit $\sin^n\vartheta$. Die *Normalfunctionen der vollen Kugelfläche* sind also (abgesehen von eventuell hinzuzufügenden constanten Factoren) von der Form:

$$P_{m,n}(\cos\vartheta)\cos n\varphi,\quad P_{m,n}(\cos\vartheta)\sin n\varphi,$$

wobei m alle ganzzahligen Werthe von 0 bis $+\infty$, n jedesmal diejenigen, welche $\leqq m$ sind, zu durchlaufen hat; für $m=n=0$ erhält man eine Constante.

Wie man sieht, gehören zu einem und demselben Werthe m $2m+1$ *verschiedene Normalfunctionen* (die Kugelflächenfunction m^{ten} Grades enthält ebensoviele willkürliche Constanten); somit ist hier der $(m+1)^{\text{te}}$ ausgezeichnete Werth

$$k^2 = m(m+1)$$

ein $(2m+1)$-*facher*, und die Auswahl der zu ihm gehörenden Normalfunctionen ist auf $m(2m+1)$-fach unendlich viele Weisen möglich. Dass die oben angegebenen, zu demselben k^2 oder m gehörigen Kugelflächenfunctionen richtig ausgewählt, d. h. je zwei von ihnen zu einander orthogonal sind, folgt aus dem Verschwinden der Integrale

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cos n'\varphi \, d\varphi, \quad \int_0^{2\pi} \sin n\varphi \sin n'\varphi \, d\varphi$$
$$\text{für } n \gtrless n'$$

und

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \sin n'\varphi \, d\varphi \quad \text{für} \quad n \geqq n'.$$

Die erwähnte Multiplicität der Wurzeln der determinirenden Gleichung (d. h. der ausgezeichneten Werthe k^2) für die volle Kugelfläche bedingt eine ausserordentlich grosse Mannigfaltigkeit der möglichen Knotenlinien, namentlich der zu grossen Werthen von m gehörigen. Man würde daher, indem man beliebige Aggregate von Kugelflächenfunctionen gleichen Grades bildete und ihre Nulllinien aufsuchte, sehr verschieden berandete sphärische Bereiche finden, für welche man dann wenigstens die erste, das Vorzeichen nicht wechselnde Normalfunction kennen würde. Auf eine besondere Art der Auswahl der ausgezeichneten Lösungen, durch welche gewisse grösste Kreise Knotenlinien werden, kommen wir im § 9 zurück. — Die Knotenlinien des oben gewählten Systems zu $k^2 = m(m+1)$ gehöriger Normalfunctionen sind *Parallelkreise und Meridiane*, deren Anzahl zusammen stets $= m$ ist; die Function $P_{m,n}(\cos\vartheta)$ verschwindet nämlich für $m - n$ Werthe von ϑ, d. h. auf $m - n$ Breitenkreisen, und der Factor $\sin n\varphi$ oder $\cos n\varphi$ natürlich auf n sich unter gleichen Winkeln in den Polen schneidenden Meridianen. Die englischen Physiker nennen nach dem Aussehen des Knotenliniensystems die Kugelflächenfunctionen: *tesseral harmonics*, wenn $n > 0$ und $m - n > 0$ ist, *zonal harmonics*, wenn $n = 0$, und *sectorial harmonics*, wenn $m - n = 0$, n aber > 0 ist. Figuren der Knotenkreise für einige der einfachsten Fälle finden sich in *Maxwell's* „Elektricität und Magnetismus“ (1873, 1. Band).

Das Princip von S. 63, angewendet auf die Schwingungen einer geschlossenen kugelförmigen Luftschicht, führt auf die Entwickelung einer auf der Kugelfläche (d. h. für $0 < \varphi < 2\pi$

und $0 < \vartheta < \pi$) gegebenen willkürlichen aber stetigen Function *nach den Kugelflächenfunctionen* im engeren Sinne, da man nach dem Vorhergehenden weiss, dass letztere ein *vollständiges* System von Normalfunctionen der Kugelfläche bilden. Im vorliegenden Falle ist diese aus der physikalischen Evidenz erschlossene Entwickelbarkeit bekanntlich auch mathematisch streng bewiesen*).

c. *Vollkugel, Kugelschale und Sectoren derselben.*

Die im Vorhergehenden für sphärische Vierecke, die von je zwei Parallelkreisen und Meridianen begrenzt sind, gewonnenen Resultate ermöglichen die Auffindung der Normalfunctionen für solche *räumliche Bereiche, welche von zwei concentrischen Kugelflächen von den Radien r_1, r_2 und je zwei Rotationskegeln und Meridianebenen, die aus den Kugelflächen Curvenvierecke der eben bezeichneten Art ausschneiden, begrenzt werden.*

Die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ nimmt durch Einführung von Polarcoordinaten r, ϑ, φ die Form an:

$$(33)\quad \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\vartheta \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right\} + k^2 u = 0.$$

Setzt man hierin $u = R(r)\cdot\Psi(\vartheta, \varphi)$, so zerfällt sie in:

$$(33\text{a})\quad \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + (k^2 r^2 - k'^2)R = 0,$$

$$(33\text{b})\quad \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + k'^2\Psi = 0,$$

worin k'^2 eine vorläufig willkürliche Constante bezeichnet.

Die Gleichung (33b) hat genau die Form der unter **b.** behandelten Gleichung (31), und da auch das Gebiet, für welches ihre ausgezeichneten Lösungen zu finden sind, nach der obigen Voraussetzung dasselbe ist, wie dort, so finden die Lösungen (32) hier für Ψ unmittelbar Anwendung. Die

*) Vergl. die Abhandlungen von *Dini,* Annali di Matematica pura ed applicata (2) VI p. 112—140, 208—225, 1874, und *Bruns,* Crelle's Journal **90,** p. 322—28, 1881.

Werthe von $\mu = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4k'^2}$ und von ν sind die Wurzeln gewisser aus den Grenzbedingungen folgender transcendenter Gleichungen; es ist hervorzuheben, dass man eine und dieselbe Lösung erhält, gleichviel ob man bei μ das obere oder untere Vorzeichen wählt, da die Vertauschung von μ mit $-(\mu + 1)$ nichts ändert.

Was nun die Gleichung (33a) betrifft, in welcher fortan ebenfalls $k'^2 = \mu(\mu + 1)$ gesetzt werde, so kann man sie schreiben:

$$\text{(33a')} \qquad \frac{d^2(rR)}{(dkr)^2} + \left\{1 - \frac{\mu(\mu+1)}{(kr)^2}\right\} rR = 0.$$

Andererseits lässt sich die Differentialgleichung der *Besselschen Functionen* vom Grade $\pm m$:

$$\frac{d^2 J_m(\varrho)}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d J_m(\varrho)}{d\varrho} + \left(1 - \frac{m^2}{\varrho^2}\right) J_m(\varrho) = 0$$

auf die Form bringen*)

$$\frac{d^2(\sqrt{\varrho} \cdot J_m)}{d\varrho^2} + \left\{1 - \frac{(2m-1)(2m+1)}{4\varrho^2}\right\} \sqrt{\varrho} \cdot J_m = 0;$$

daraus folgt, dass das vollständige Integral von (33a) ist:

$$\text{(34)} \qquad R_\mu = C_\mu \frac{J_{\mu+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} + C_\mu' \frac{J_{-\mu-\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}.$$

Das Product dieser Function R_μ mit den Functionen (32) stellt die Normalfunctionen des betrachteten Raumgebietes dar, sofern man das Verhältniss $C_\mu' : C_\mu$ *und den Werth von* k aus den transcendenten Gleichungen bestimmt hat:

$$h_1' R_\mu(r_1) + kR_\mu'(r_1) = 0, \quad h_2' R_\mu(r_2) - kR_\mu'(r_2) = 0,$$

worin der obere Index an R die Differentiation nach kr andeutet und h_1', h_2' zwei gegebene (positive) Constanten sind. Da für diese Wurzeln μ, also k', constant und der Factor von $k^2 R$ in der Differentialgleichung (33a) positiv ist, so sind auf die Integrale der letzteren die *Sturm*'schen Schlüsse anwendbar; insbesondere folgt daraus, dass die Functionen (34), nach der Grösse der Wurzeln k geordnet, innerhalb des Ge-

*) Cf. *Rayleigh*, l. c. II, p. 300.

bietes auf 0, 1, 2 .... concentrischen Kugelflächen verschwinden.

Die im Vorhergehenden gefundenen Normalfunctionen des von zwei concentrischen Kugelflächen, zwei coaxialen Kreiskegeln und zwei durch deren Axe gehenden Meridianebenen begrenzten Raumgebietes *besitzen demnach als Knotenflächen (Nullflächen) je l concentrische Kugelflächen, m coaxiale Kreiskegel und n Meridianebenen*, wobei alle Combinationen der ganzen Zahlen l, m, n $(= 0, 1, 2 \ldots \infty)$ vorkommen. Dass es ausser diesen keine anderen, nicht in Producte aus Functionen je einer Coordinate zerlegbaren Normalfunctionen giebt, schliessen wir wieder aus dem *Continuitätsprincip*, indem wir das betrachtete Raumgebiet stetig in ein rechtwinkliges Parallelepipedon übergehen lassen, für welches die Vollständigkeit des Systems von Normalfunctionen mit den entsprechenden Knotenflächen bekannt ist.

Mit Uebergehung der weniger interessanten Grenzfälle des betrachteten Gebietes, also z. B. eines Kugelsectors, eines Ringes mit einem Ringsector als Querschnitt, wollen wir noch kurz den Fall einer *Kugelschale* erörtern.

Da dann die Functionen Ψ in die Normalfunctionen der vollen Kugelfläche übergehen, so werden ν und μ *ganze* Zahlen $n, m,$ welche man auf die Werthe $0, 1, 2 \cdots + \infty$ beschränken kann. Folglich gehen die Functionen (34) nach Abtrennung des Factors $\frac{1}{\sqrt{kr}}$ in die speciellen bei Gelegenheit des ebenen Ringsectors vom Winkel 2π betrachteten Bessel'schen Functionen vom Grade $\pm (m + \frac{1}{2})$ über, welche durch die Formeln (30) definirt sind.

Für die *Vollkugel*, also wenn man $r_2 = 0$ werden lässt und *Stetigkeit* im Kugelmittelpunkte fordert, fallen die Functionen $J_{-m-\frac{1}{2}}$ fort, und die Normalfunctionen erhalten die Form:

$$(35) \qquad u_{m,n} = J_{m+\frac{1}{2}}(kr) \cdot (kr)^{-\frac{1}{2}} P_{m,n}(\cos \vartheta) \frac{\cos}{\sin} (n\varphi).$$

Zu jedem ausgezeichneten Werthe k, welcher, wenn $\bar{r}$ den Radius der Kugel bezeichnet, eine Wurzel der transcendenten Gleichung

$$(36) \qquad h J_{m+\frac{1}{2}}(k\bar{r}) + k \left\{ J'_{m+\frac{1}{2}}(k\bar{r}) - \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(k\bar{r})}{2k\bar{r}} \right\} = 0$$

ist, gehören $2m + 1$ verschiedene solche Normalfunctionen; dass dieselben ein orthogonales System bilden, ergiebt sich ebenso, wie bei den Kugelflächenfunctionen.

Die einfachsten unter den Functionen (35) sind diejenigen, für welche $n = 0$ und $m = 0$ bezw. $= 1$ ist; dieselben sind (bei Fortlassung des constanten Factors) gegeben durch die Ausdrücke:

$$u_{0,0} = \frac{\sin kr}{r}, \; u_{1,0} = \frac{\cos \vartheta}{r} \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right).$$

Rayleigh hat bei Behandlung der freien Schwingungen einer in einer Kugelfläche eingeschlossenen Luftmasse*) die zu diesen Normalfunctionen gehörigen Werthe k und Nullflächen (welche bei den Luftschwingungen die *Schwingungsbäuche* sind) discutirt, unter der diesem physikalischen Probleme entsprechenden Voraussetzung, dass das h der Grenzbedingung $= 0$ ist. Die Function $u_{0,0}$ stellt die rein *radialen*, $u_{1,0}$ die rein *axialen* (diametralen) Schwingungen dar; bei ersteren findet die Bewegung überall parallel dem Radius, bei letzteren überall parallel einem und demselben Durchmesser statt. Die Nullflächen sind beidemal *concentrische Kugelflächen*, zu welchen bei den *axialen* Schwingungen stets die *Aequatorebene* hinzukommt; die Radien der sphärischen Nullflächen sind bestimmt durch $r = \frac{i\pi}{k}$ $(i = 1, 2 \ldots)$ für $u_{0,0}$, durch die transcendente Gleichung $\operatorname{tg} kr = kr$ für $u_{1,0}$. Die letztere liefert, falls man in ihr $r = \bar{r}$ setzt, andererseits auch die ausgezeichneten Werthe k, welche zu $u_{0,0}$ gehören; dem kleinsten derselben, welcher $= 0$ ist, entspricht die Normalfunction $u = 1$, also keine Schwingung, (da bei constantem Geschwindigkeitspotential alle Lufttheilchen in Ruhe sind). Für die Functionen von der Form $u_{1,0}$ lautet die transcendente Gleichung für k:

$$\operatorname{tg} k\bar{r} = \frac{2k\bar{r}}{2 - (k\bar{r})^2}$$

*) l. c. II, p. 303—308.

und besitzt die kleinste Wurzel $k\bar{r} = 0{,}663\ldots\pi$, welcher Werth überhaupt dem *tiefsten aller Eigentöne* entspricht, welche die kugelförmige Luftmasse geben kann. Es sei noch bemerkt, dass die *radialen* Schwingungen mit den oben bestimmten Werthen von k auch *jedem*, durch eine ganz beliebige Kegelfläche ausgeschnittenen *Kugelsector* zukommen.

Weitere numerische Angaben über die ausgezeichneten Werthe k finden sich bei *Rayleigh* l. c. p. 306, 307; man sieht daraus unter Anderem, wie sehr die Werthe von k, also die Tonhöhen, durch das Auftreten *kugelförmiger* Knotenflächen vergrössert werden.

Die *Reihenentwickelung einer willkürlichen Function von* r, ϑ, φ *nach den Normalfunctionen* (35), deren Möglichkeit wir in der mehrfach erwähnten Weise schliessen, und welche als speciellen Fall die Entwickelung einer willkürlichen Function von r in die bei constantem m nach den Wurzeln k_l der transcendenten Gleichung (36) fortschreitende Reihe

$$\sum_1^\infty {}_l \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(k_l r)}{\sqrt{k_l r}}$$

für das Intervall $0 < r < \bar{r}$ in sich schliesst, scheint noch nicht mathematisch untersucht worden zu sein. Sie ist in der Theorie der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ mit fest gegebenem k^2 *das Analogon zur Entwickelung nach steigenden Kugelfunctionen in der Potentialtheorie*, worauf wir im III. Theile noch zurückkommen werden. Reicht das Intervall von r nicht bis an den Nullpunkt heran, so kommt eine die Functionen $\frac{J_{-m-\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}$ enthaltende Reihe hinzu, welche der Entwickelung nach *fallenden* räumlichen Kugelfunctionen entspricht.

Die Integraleigenschaft der Bessel'schen Functionen von der Ordnung $m + \frac{1}{2}$, welche aus der Orthogonalität der Normalfunctionen (35) folgt:

$$\int_0^{\bar{r}} J_{m+\frac{1}{2}}(k_i r) J_{m+\frac{1}{2}}(k_l r) \frac{r\,dr}{\sqrt{k_i k_l}} = 0, \quad (k_i \gtrless k_l),$$

unterscheidet sich von der früher für die Bessel'schen Functionen beliebiger Ordnung gefundenen nicht in der Form, sondern nur durch die transcendente Gleichung (hier 36), welche die Werthe k_l bestimmt.

Indem man $\bar{r}$ unendlich gross werden lässt, schliessen sich die ausgezeichneten Werthe k *stetig* aneinander an, so dass man zu einer *Integraldarstellung* von der Form

$$\int_{k_1}^{\infty} A(k) \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} dk$$

für eine willkürliche Function des auf positive Werthe beschränkten Argumentes r gelangt. —

Wenn nach dem Vorhergehenden ersichtlich ist, wie die allgemeinen Bessel'schen und Kugelfunctionen die Lösung gewisser physikalischer Probleme ermöglichen, so ist andererseits hervorzuheben, dass man umgekehrt durch diese physikalische Bedeutung, insbesondere für die Schwingungsprobleme, ein anschauliches Bild von dem Verlaufe jener Functionen im Reellen erhält. Letzteres gilt ebenso für diejenigen transcendenten Functionen, mit welchen wir uns im nächsten Paragraphen beschäftigen werden.

§ 8. Gebiete in der Ebene und auf der Kugel, welche von ebenen bezw. sphärischen confocalen Kegelschnitten begrenzt werden. Allgemeine Betrachtungen über die bisher besprochenen Specialfälle.

a. *Von confocalen Kegelschnitten begrenzte ebene Bereiche.*

Um die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ für Gebiete der in der Ueberschrift bezeichneten Art zu integriren, führt man statt der rechtwinkligen Coordinaten *elliptische* ein (damit längs der Begrenzungslinien je eine Coordinate constant ist). Die elliptischen Coordinaten in der Ebene kann man definiren als die Wurzeln der in λ^2 quadratischen Gleichung

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - e^2} = 1,$$

worin $2e$ die allen Kegelschnitten des Orthogonalsystems

gemeinsame lineare Excentricität ist; wird die zwischen 0 und e^2 liegende Wurzel mit ν^2, die zwischen e^2 und $+\infty$ liegende mit μ^2 bezeichnet, so ist μ die halbe grosse Axe der Ellipse, ν die halbe reelle Axe der Hyperbel, welche durch den Punkt x, y hindurchgeht. Um aber der transformirten Differentialgleichung eine möglichst einfache Gestalt zu geben, wählt man als unabhängige Variabele nicht die elliptischen Coordinaten selbst, sondern die durch die Substitutionen

$$\nu = e \cos \xi, \quad \mu = e \cos i\eta = e\,\mathfrak{Cos}\,\eta$$

definirten Grössen ξ und η. Damit jedem Punkte x, y nur *ein* Werthepaar ξ, η entspricht, kann man η auf das Intervall von 0 bis $+\infty$, ξ auf dasjenige von 0 bis 2π beschränken, indem man sich die ΞH-Ebene längs der Verbindungslinie der Brennpunkte aufgeschnitten denkt. $\eta =$ Const. giebt dann eine ganze *Ellipse*, während ξ constant gesetzt nur einen *halben Hyperbelast* darstellt (die ganze Hyperbel ist gegeben durch die vier Werthe $\pm \xi$, $\pi \pm \xi$; ξ bedeutet den Neigungswinkel der Asymptoten gegen die reelle Axe). In ξ, η ausgedrückt wird nämlich

$$x = e\,\mathfrak{Cos}\,\eta \cos \xi = e \cos i\eta \cos \xi,$$
$$y = e\,\mathfrak{Sin}\,\eta \sin \xi = e\, i \sin i\eta \sin \xi,$$
$$x + iy = e \cos (\xi + i\eta).$$

Letztere Gleichung zeigt, dass die Fläche der Ellipse oder überhaupt ein von je zwei confocalen Ellipsen und Hyperbeln begrenztes Flächenstück in der XY-Ebene durch die angegebene Substitution auf ein *Rechteck* in der ΞH-Ebene *conform abgebildet* wird; daher geht gemäss den Entwickelungen in § 4, c des I. Theiles die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ über in

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + k^2 e^2 \sin (\xi + i\eta) \sin (\xi - i\eta) u = 0 \quad \text{oder}$$

$$(37) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + k^2 e^2 (\cos^2 i\eta - \cos^2 \xi) u = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + k'^2 (\mathfrak{Cos}^2\,\eta - \cos^2 \xi) u = 0,$$

wo $k' = k.e$ gesetzt ist.

Die letztere Form der Differentialgleichung, mit der einzigen Abweichung, dass statt $\mathfrak{Cos}^2 \eta - \cos^2 \xi$ geschrieben ist

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Cos}\, 2\eta - \cos 2\xi),$$

haben unter Anderen *Heine* und *Mathieu* bei ihren Untersuchungen über das betrachtete Problem zu Grunde gelegt, während *H. Weber**) sich einer etwas verschiedenen Substitution bedient hat.

Will man die Differentialgleichung (37) durch *Producte* aus je einer Function von ξ und einer von η:

$$\Xi(\xi) \cdot \mathrm{H}(\eta)$$

integriren, so müssen diese Functionen den gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügen:

$$(38) \qquad \begin{aligned} &\frac{d^2 \Xi}{d\xi^2} - (k'^2 \cos^2 \xi - a)\,\Xi = 0, \\ &\frac{d^2 \mathrm{H}}{d\eta^2} + (k'^2\, \mathfrak{Cos}^2 \eta - a)\,\mathrm{H} = 0, \end{aligned}$$

worin a eine unbestimmte Constante bezeichnet; dabei geht die zweite der Gleichungen (38) aus der ersten dadurch hervor, dass man ξ durch $i\eta$ ersetzt.

Mit den durch die Differentialgleichungen (38) definirten Functionen, für welche *Heine* die Benennung „*Functionen des elliptischen Cylinders*" eingeführt hat, haben sich *Mathieu***), *Heine****), *Lindemann* †), *Bruns* und *Callandreau* ††) und *Hartenstein* †††) beschäftigt; dieselben haben verschiedene Reihenentwickelungen für die genannten Functionen gegeben. Die Constante a haben *Mathieu* und *Heine* so zu bestimmen gesucht, dass Ξ *periodisch* ist bei Vermehrung des Argumentes ξ um 2π, wie es z. B. die Behandlung der Vollellipse erfordert;

---

*) Math. Annalen **1**, p. 30, 1868.

**) Journ. de Liouville (2) XIII, 1868 u. Cours de physique mathématique, 1873, p. 122—164.

***) Handbuch der Kugelfunctionen p. 401 ff.

†) Math. Ann. **22**, 1883.

††) Astronom. Nachrichten **106**, 1883, p. 192—203 (Bruns) und **107**, 1884, p. 32—38 (Callandreau), 128—132 (Bruns).

†††) Dissertation, Leipzig, 1887.

allein auch hierfür ist noch keine brauchbare Methode gefunden. *Bruns* hat sich mit der Integration einer in der Störungstheorie vorkommenden, mit (38) im Wesentlichen übereinstimmenden Differentialgleichung beschäftigt, indem er darin k'^2 und a als gegeben ansah; er ist dabei u. A. zu einer Relation gelangt, welche diejenige, die zwischen den Grössen k'^2 und a bestehen muss, damit das Integral periodisch ist, als speciellen Fall enthält. Die allgemeinen, *nicht* periodischen Integrale hat *Lindemann* untersucht; *Hartenstein* hat nur den Fall behandelt, wo das k^2 in der partiellen Differentialgleichung *negativ* ist. — Die Integration unter den Bedingungen $\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ für je zwei beliebige Ellipsen und Hyperbeln, also die Herstellung der Normalfunctionen für ein von den letzteren begrenztes Gebiet, scheint dagegen noch gar nicht versucht worden zu sein. Indessen lässt sich, wie ich unten begründen werde, auch ohne nähere Kenntniss derselben Folgendes behaupten: Es giebt für ein solches Curvenviereck eine doppelt unendliche Reihe von Normalfunctionen, welche längs jeder der vier Seiten (also für $\xi = \xi_1$, $\xi = \xi_2$ und $\eta = \eta_1$, $\eta = \eta_2$) einer der Grenzbedingungen $\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ genügen (die allgemeinere Grenzbedingung mit in bestimmter Weise variabelem h, welcher auch durch Producte $\Xi \mathrm{H}$ genügt werden könnte, schliessen wir wegen Mangels einer einfachen physikalischen Bedeutung aus), und von denen eine jede durch eine bestimmte Zahl $m - 1$ von elliptischen und eine bestimmte Zahl $n - 1$ von hyperbolischen Knotenlinien, wobei alle Combinationen von $m = 1, 2 \cdots \infty$ und $n = 1, 2 \cdots \infty$ vorkommen, charakterisirt ist. Dieser Satz, welchen wir (wie in ähnlichen Fällen) das *Oscillationstheorem* nennen wollen (K.), lässt sich aus den in § 6a (S. 68—72) erörterten *Sturm*'schen Sätzen ableiten, da ja die Differentialgleichungen (38) ohne weitere Umformung unter die von *Sturm* betrachtete Form fallen. Die Betrachtungsweise ist hier nur aus dem Grunde etwas abzuändern, weil sich jetzt nicht mehr, wie bei den bisher betrachteten Bereichen, die Constante a der Differentialgleichungen *gesondert* aus den Grenzbedingungen für ein Paar

gegenüberliegender Seiten, und dann die Constante k^2 aus denjenigen für das andere Seitenpaar bestimmen lässt, sondern a und k^2 *zugleich* nebst den Verhältnissen der Integrationsconstanten aus einem System von vier transcendenten Gleichungen zu berechnen sind.

Man denke sich nun zunächst in einer der beiden Differentialgleichungen (38), z. B. in

$$\frac{d^2 \Xi}{d\xi^2} + (-k'^2 \cos^2 \xi + a)\, \Xi = 0,$$

der Grösse k'^2 einen *festen* Werth beigelegt. Dann giebt es nach *Sturm's* Sätzen (5. u. 6. S. 69) sicher *einen und nur einen Werth von* a, für welchen die Function Ξ den gegebenen Grenzbedingungen für $\xi = \xi_1$ und $\xi = \xi_2$ genügt und im Intervalle $\xi_2 < \xi < \xi_1$ die vorgeschriebene Anzahl $(m - 1)$ von Nullstellen besitzt; jene Sätze sind hier anwendbar, weil der Factor von Ξ mit a *wächst.*

Aendert man nun den ursprünglich angenommenen Werth von k'^2 ab, so wird sich auch der soeben definirte Werth von a ändern; man kann also *a als Function von k'^2* auffassen, wobei man sich auf *positive* Werthe von k'^2 beschränken kann, weil schon bekannt ist, dass nur für solche bei den Grenzbedingungen $\bar{u} = 0$ und $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ (von 0 verschiedene) Normalfunctionen existiren. Man sieht auf den ersten Blick, dass a mit k'^2 *wachsen* muss, damit die Zahl der Nullstellen (oder Oscillationen) von Ξ dieselbe bleibe; dies ergiebt sich aber auch in Strenge auf folgende Weise. Sind Ξ_1, Ξ_2 zwei Integrale, die allen festgesetzten Bedingungen genügen und zu den Werthepaaren $k_1'^2$, a_1 und $k_2'^2$, a_2 gehören, dann folgt aus der Differentialgleichung auf bekannte Weise:

$$(k_1'^2 - k_2'^2) \int_{\xi_2}^{\xi_1} \cos^2 \xi \cdot \Xi_1 \Xi_2 \, d\xi = (a_1 - a_2) \int_{\xi_2}^{\xi_1} \Xi_1 \Xi_2 \, d\xi.$$

Sind nun k_2', a_2 unendlich wenig von k_1', a_1 verschieden, so ergiebt sich hieraus:

$$(39)\qquad \frac{d a_\xi}{d(k'^2)} = \lim. \left\{ \frac{\int\limits_{\xi_2}^{\xi_1} \cos^2\xi \,.\, \Xi_1 \Xi_2 \, d\xi}{\int\limits_{\xi_2}^{\xi_1} \Xi_1 \Xi_2 \, d\xi} \right\} = \frac{\int\limits_{\xi_2}^{\xi_1} \cos^2\xi \,.\, \Xi^2 d\xi}{\int\limits_{\xi_2}^{\xi_1} \Xi^2 d\xi}.$$

Diese Gleichung lehrt, dass a_ξ *beständig* zunimmt, wenn k'^2 wächst; *stellt man also* a_ξ *als Ordinate,* k'^2 *als Abscisse dar, so erhält man eine beständig ansteigende Curve,* welche mit C_ξ bezeichnet werden möge (— dementsprechend ist auch a mit dem Index ξ versehen —). Für $k'^2 = 0$ ergiebt sich für a_ξ ein leicht zu berechnender *positiver* Werth.

In der Differentialgleichung für H möge nun umgekehrt a zunächst als fest betrachtet werden; dann sind wieder die Sätze von *Sturm* anwendbar und gestatten den Schluss, dass es *einen und nur einen Werth von* k'^2 giebt, für welchen das Integral H den Grenzbedingungen $\mathsf{H} = 0$ oder $\frac{d\mathsf{H}}{d\eta} = 0$ für $\eta = \eta_1$ und $\eta = \eta_2$ und ausserdem der Forderung genügt, innerhalb des Intervalls $\eta_2 < \eta < \eta_1$ genau $(n-1)$-mal zu verschwinden. Nun kann man wieder den ursprünglich gegebenen Werth a variiren und k'^2 *als Function von* $a = a_\eta$ oder auch umgekehrt a_η als Function von k'^2 betrachten. Wieder ergiebt sich, dass a_η und k'^2 sich stets *in gleichem Sinne ändern*; denn es folgt wie oben:

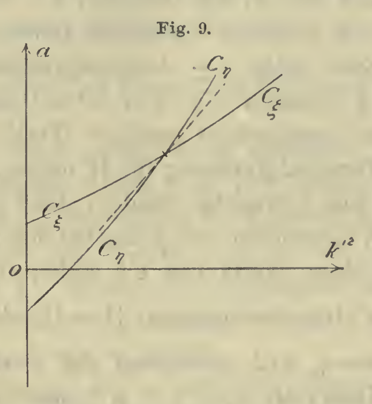
$$(39')\qquad \frac{d a_\eta}{d(k'^2)} = \frac{\int\limits_{\eta_2}^{\eta_1} \mathfrak{Cos}^2\eta \,.\, \mathsf{H}^2 d\eta}{\int\limits_{\eta_2}^{\eta_1} \mathsf{H}^2 d\eta}.$$

Die Curve C_η, deren Ordinate a_η und deren Abscisse k'^2 ist, *steigt demnach ebenfalls beständig an.*

Für $k'^2 = 0$ hat a_η einen (leicht angebbaren) *negativen* Werth; die Curve C_η *geht also von einem tieferen Punkte* aus, als die Curve C_ξ. Für *sehr grosse* Werthe von k'^2 muss a_η jedenfalls $> k'^2$ sein, weil im ganzen Gebiete $\mathfrak{Cos}\,\eta > 1$ (höchstens an der Grenze $= 1$) ist und daher, wenn $a_\eta \leqq k'^2$ wäre, der Factor von H in (38) viel zu gross für die geforderte Anzahl von Oscillationen würde. Aus demselben

Grunde kann a_ξ für sehr grosse Werthe von k'^2 *nicht* $\geqq k'^2$ sein, weil sonst der Factor $a - k'^2 \cos^2 \xi$ wiederum viel zu grosse positive Werthe annehmen würde. Folglich liegt *für sehr grosse Abscissen* die Curve C_η, die von einem *tieferen* Punkte der Ordinatenaxe ausging, *über* der Curve C_ξ; *beide müssen sich also nothwendig schneiden.* (Vgl. Fig. 9.)

Fig. 9.



Es bleibt noch zu beweisen, dass dies nur in *einem* Punkte geschehen kann. Die Formeln (39) und (39′) zeigen nun, dass $\frac{d a_\xi}{d(k'^2)}$ sicher stets < 1, $\frac{d a_\eta}{d(k'^2)}$ stets > 1 ist; folglich ist für alle Abscissen $\frac{d a_\eta}{d(k'^2)} > \frac{d a_\xi}{d(k'^2)}$, und daher ein mehrmaliger Schnitt unmöglich. Denn legt man durch den ersten Schnittpunkt eine Gerade unter $+ 45^0$ gegen die Abscissenaxe, so bleibt C_η fortan stets über, C_ξ stets unter derselben. — Damit ist, wie ich glaube, bewiesen, dass die Curven C_ξ und C_η *stets einen und nur einen Schnittpunkt haben, dass es also ein völlig bestimmtes Werthepaar* a, k'^2 *giebt, welchem eine gerade auf* $m - 1$ *Ellipsen und auf* $n - 1$ *Hyperbelästen verschwindende Normalfunction* $(\Xi \, \mathrm{H})_{m,n}$ *entspricht.*

Dass die Gesammtheit der so gewonnenen Normalfunctionen alle überhaupt möglichen umfasst, schliessen wir wieder auf Grund des Continuitätsprincips, indem wir das von zwei Ellipsen und zwei Hyperbeln begrenzte Curvenviereck in ein Rechteck übergehen lassen.

Die Orthogonalitäts-Eigenschaft der Normalfunctionen zerfällt auch hier in je eine Integralrelation für die Functionen Ξ und H; doch sind dieselben nicht von so einfacher Form, wie in den bisher betrachteten Specialfällen. Man findet nämlich, wenn $\Xi_1 \mathsf{H}_1$ und $\Xi_2 \mathsf{H}_2$ zwei verschiedene Normalfunctionen (bei denselben Grenzbedingungen) sind,

$$\frac{\int\limits_{\xi_2}^{\xi_1} \cos^2\xi . \Xi_1 \Xi_2 \, d\xi}{\int\limits_{\xi_2}^{\xi_1} \Xi_1 \Xi_2 \, d\xi} = \frac{\int\limits_{\eta_2}^{\eta_1} \mathfrak{Cof}^2 \eta . \mathsf{H}_1 \mathsf{H}_2 \, d\eta}{\int\limits_{\eta_2}^{\eta_1} \mathsf{H}_1 \mathsf{H}_2 \, d\eta} = \frac{a_1 - a_2}{k_1'^2 - k_2'^2};$$

diese Gleichungen bestehen auch noch, wenn *eine* der Zahlen m, n für $\Xi_1 \mathsf{H}_1$ und $\Xi_2 \mathsf{H}_2$ übereinstimmt. Nur wenn zufällig (für specielle Bereiche) zwei Normalfunctionen existiren, für welche entweder $a_1 = a_2$ oder $k_1'^2 = k_2'^2$ wird, erhält man die einfachen Integraleigenschaften

$$\int\limits_{\xi_2}^{\xi_1} \cos^2\xi . \Xi_1 \Xi_2 \, d\xi = \int\limits_{\eta_2}^{\xi_1} \mathfrak{Cof}^2 \eta . \mathsf{H}_1 \mathsf{H}_2 \, d\eta = 0$$

im ersten,

$$\int\limits_{\xi_2}^{\xi_1} \Xi_1 \Xi_2 \, d\xi = \int\limits_{\eta_2}^{\eta_1} \mathsf{H}_1 \mathsf{H}_2 \, d\eta = 0$$

im zweiten Falle.

Besondere Berücksichtigung erfordern bei dem vorliegenden Probleme solche Bereiche, *welche über die X-Axe hinübergreifen*, sowie namentlich solche, *die von weniger als vier Kegelschnitten begrenzt werden.*

Nach der oben getroffenen Festsetzung sollte ξ alle Werthe von 0 bis 2π, η alle von 0 bis $+\infty$ annehmen können (analog dem Azimuth und Radius im gewöhnlichen Polarcoordinatensystem); dementsprechend hat man sich die XY-Ebene längs der Verbindungslinie der Brennpunkte ($x = \pm e$, $y = 0$) *aufgeschnitten* zu denken. Man kann dann ohne Weiteres Bereiche behandeln, welche nicht über die Strecke der Abscissenaxe von $x = -e$ bis $x = +\infty$ hinübergreifen; gehört aber ein Stück der Strecke von $+e$ bis

$+\infty$ dem Innern des Gebietes an (wie es in Fig. 10b angedeutet ist), so muss man das Intervall von ξ über Null hinaus nach der negativen Seite erweitern, und dasselbe muss man mit dem Intervall von η thun, falls der gegebene Bereich über die Verbindungslinie der Brennpunkte hinüberreichen sollte, wie in Fig. 10a; (denn beim Ueberschreiten derselben muss η das Vorzeichen wechseln, wenn das Vorzeichen von ξ

Fig. 10 u. 11.

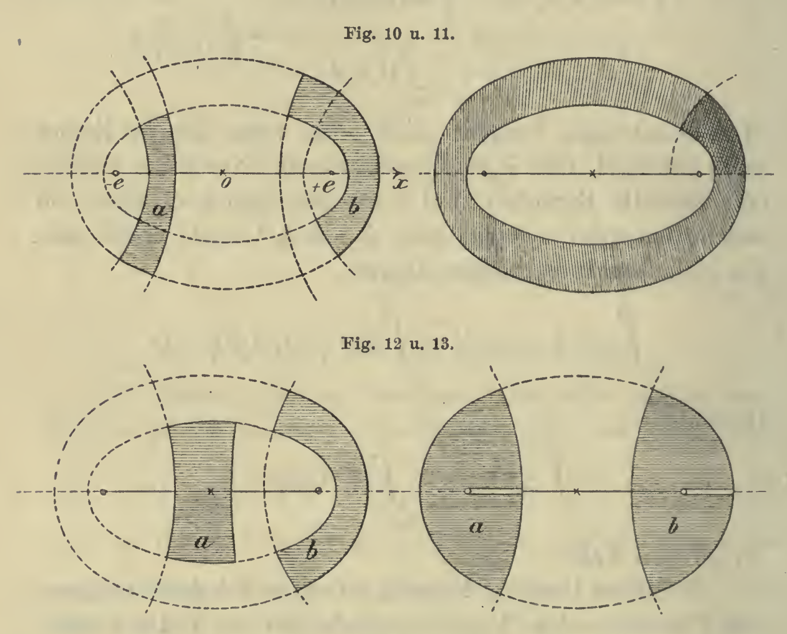


Fig. 12 u. 13.

unverändert bleibt). Man kann auf diese Weise auch zu Gebieten gelangen, welche *über sich selbst übergreifen*, also Theile der Ebene *doppelt oder mehrfach überdecken*, indem sie in ein anderes Blatt der unendlich vielblättrigen Riemann'schen Fläche, welche man sich über der ΞH-Ebene ausgebreitet zu denken hat, übertreten (Fig. 11). Das Gesammtintervall von ξ ist in solchen Fällen grösser als 2π. — Uebrigens bleiben aber durch diese Gebietserweiterung die früheren Schlüsse unberührt. —

Zu den soeben betrachteten Gebieten gehören insbesondere diejenigen, welche von zwei verschiedenen Ellipsen und

zwei Stücken *desselben* Hyperbelastes (Fig. 12b) oder von zwei verschiedenen Hyperbeln und *einer* Ellipse (Fig. 12a) begrenzt werden. Für solche Gebiete kann man die Normalfunctionen dadurch erhalten, dass man für die Symmetrielinie ($\xi = 0$ bezw. $\eta = 0$) 1. die Grenzbedingung $\bar{u} = 0$, 2. die Grenzbedingung $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ vorschreibt, die entsprechenden Normalfunctionen der einen Gebietshälfte bestimmt und diese im Falle 1. antisymmetrisch (d. h. so, dass sie in symmetrisch gelegenen Punkten entgegengesetzt gleiche Werthe erhalten), im Falle 2. symmetrisch in die andere Gebietshälfte hinein fortsetzt. Beide Arten von Gebieten können weiter in ein von nur *einer* Ellipse und *einem* Hyperbelast begrenztes Flächenstück ausarten, indem bei den ersteren (Fig. 13a) die innere Ellipse, bei den letzteren (Fig. 13b) der innere Hyperbelast sich auf eine Doppellinie reducirt und als Begrenzung verschwindet. Hierbei tritt an die Stelle der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$, welche ursprünglich an jener Doppellinie, also für $\eta = 0$ bezw. $\xi = 0$, zu erfüllen sein würde, die Forderung, dass die Normalfunctionen und ihre Derivirten bei Ueberschreitung jener Linie *stetig* sein sollen, damit man nämlich die Linie als Begrenzung fortlassen darf. Dieses *Auftreten einer Stetigkeitsbedingung statt einer Grenzbedingung* hat bisher nur beim Uebergang vom Kreisring zum Vollkreis oder von der Kugelschale zur Vollkugel ein Analogon gehabt, wo die im Mittelpunkte unstetige Bessel'sche Function zweiter Art ausgeschlossen werden musste, wenn der Mittelpunkt in das Gebiet aufgenommen werden sollte. Es ist nicht zu verwechseln mit der früher schon mehrfach besprochenen Grenzbedingung der *Periodicität*, welche sich darbietet, wenn *zwei verschiedene* Begrenzungslinien verschmelzen, d.h. als Begrenzung verschwinden sollen. Dieser letzte Fall tritt bei dem vorliegenden Probleme dann ein, wenn ein von 2 confocalen Ellipsen und 2 Hyperbelstücken begrenztes Gebiet sich zum *Ring* zusammenschliesst; für die Functionen Ξ tritt dann an Stelle der Grenzbedingungen die Forderung der Periodicität bei Vermehrung ihres Argumentes ξ um 2π.

Gemäss dieser Bedingung hat *Mathieu* a. a. O. Reihenentwickelungen für die Grösse a (bei ihm R) nach Potenzen von $k'^2(4h^2)$ und für die ausgezeichneten Lösungen Ξ solche nach Potenzen von k'^2 multiplicirt mit sin bezw. cos der Vielfachen von ξ (bei ihm α) abgeleitet. Er unterscheidet zwei Arten von Lösungen Ξ; die einen verschwinden längs der Strecken zwischen den Endpunkten der grossen Axe und den Brennpunkten der Ellipse, die andern haben daselbst Maxima und Minima. (Beim Kreise würden je zwei solche zu demselben ausgezeichneten Werthe k'^2 gehören, was hier nicht der Fall ist.) Die Lösungen H, welche mit den eben besprochenen Ξ multiplicirt die Normalfunctionen der *Vollellipse* liefern und demnach für $\eta = 0$ der Stetigkeitsbedingung genügen müssen, zerfallen ebenfalls in zwei Classen, von denen die eine auf der Verbindungslinie der Brennpunkte verschwindet, die andere dort Maxima oder Minima erreicht. *Mathieu* zeigt nun, dass die zu demselben Werthepaare k'^2, a gehörigen Ξ und H immer derselben Classe angehören, also das Product ΞH auf der ganzen grossen Axe entweder verschwindet oder relative Maxima und Minima hat, mit anderen Worten, dass die Normalfunctionen in Bezug auf die grosse Axe entweder symmetrisch oder antisymmetrisch sind. Die einfachsten Fälle der Knotenlinien sind: Die grosse Axe allein, die kleine Axe allein, beide zugleich, zwei Aeste einer und derselben Hyperbel, zwei solche combinirt mit der grossen oder kleinen Axe. *Mathieu* zeigt durch eine ziemlich umständliche Betrachtung, dass die Anzahl der elliptischen Knotenlinien $m - 1$ beträgt, wenn k'^2 die m^{te} Wurzel der transcendenten Gleichung $\mathsf{H}(\bar{\eta}) = 0$ ist, und gleichzeitig zwischen k'^2 und a immer diejenige Relation besteht, welche dem Vorhandensein einer bestimmten Anzahl hyperbolischer Knotenlinien entspricht. Dieser Satz ist in dem oben für ein beliebiges von je zwei confocalen Ellipsen und Hyperbeln begrenztes Gebiet bewiesenen als specieller Fall enthalten. Ein Verfahren zur Berechnung von k^2 hat Mathieu nicht angegeben.

Es sei hier noch erwähnt, dass *Mathieu* gelegentlich des

Problems der Wärmeleitung in einem elliptischen Cylinder hervorhebt, dass die Normalfunctionen bei der Grenzbedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ für die Ellipse *nicht als Producte* aus zwei Functionen von je einer Coordinate bestimmt werden können; dies ist in Uebereinstimmung mit dem von mir S. 92 ausgesprochenen Satze. —

Ueber die Reihenentwickelungen einer willkürlichen Function nach den Functionen des elliptischen Cylinders, bezw. nach den Producten $(\Xi \mathsf{H})_{m,n}$, scheinen keine eingehenden Untersuchungen vorhanden zu sein; *Mathieu* erwähnt nur, wie die *Coefficienten* jener Reihen mit Hülfe der Orthogonalitäts-Eigenschaft bestimmt werden können. —

Ein Grenzfall des elliptischen Coordinatensystems ist das *parabolische,* bestehend aus zwei sich orthogonal schneidenden Schaaren confocaler Parabeln. Dasselbe hat *H. Weber* l. c. benutzt, um die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ für Flächenstücke zu integriren, *welche von je zwei Parabeln der beiden Schaaren begrenzt werden.* Die *parabolischen Coordinaten* führt er ein durch die Substitution

$$x = \xi^2 - \eta^2, \quad y = 2\xi\eta,$$

oder

$$x + iy = F(\xi + i\eta) = (\xi + i\eta)^2;$$

der Brennpunkt ist dann der Nullpunkt, die Axe der Schaar $\xi =$ Const., gegeben durch $\xi = 0$, die negative X-Axe; $2\xi^2$ und $2\eta^2$ sind die Parameter der Parabeln. Lässt man sowohl ξ als η alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so erhält man die *doppelt* überdeckte XY-Ebene mit einem Verzweigungsschnitt von $x = 0$ bis $x = +\infty$ oder von $x = 0$ bis $x = -\infty$. Die Differentialgleichung wird zufolge S. 28, 29, da hier $F'(\xi + i\eta) = 2(\xi + i\eta)$ ist,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + k^2(\xi^2 + \eta^2)u = 0$$

und zerfällt durch den Ansatz $u = \Xi(\xi)\mathsf{H}(\eta)$ in:

$$(40) \qquad \begin{aligned} &\frac{d^2\Xi}{d\xi^2} + (k^2\xi^2 + a)\Xi = 0, \\ &\frac{d^2\mathsf{H}}{d\eta^2} + (k^2\eta^2 - a)\mathsf{H} = 0. \end{aligned}$$

Die Betrachtungen, welche im Falle des elliptischen Coordinatensystems zum Beweise des „Oscillationstheorems“ für die Normalfunctionen angestellt wurden, führen hier um so leichter zum Ziel, als der Factor von k^2 in *beiden* Differentialgleichungen positiv ist. Dies hat nämlich zur Folge, dass die Curve C_η, welche von einem Punkte der *negativen* Ordinatenaxe (a-Axe) ausgeht, beständig *steigt*, die von einem Punkte der *positiven* a-Axe ausgehende Curve C_ξ aber beständig *fällt*, so dass sich beide sicher in einem und nur einem Punkte schneiden.

H. Weber giebt ohne Ableitung vier bestimmte Particularlösungen H', Ξ'', H', H'' der Gleichungen (40) in Gestalt bestimmter Integrale an, in Betreff deren wir hier nur auf die Originalabhandlung (l. c. S. 31) verweisen.

Die Normalfunctionen eines von vier Parabeln $\xi = \xi_1$, $\xi = \xi_2$, $\eta = \eta_1$, $\eta = \eta_2$ begrenzten Bereiches sind dann von der Form

$$(A'\Xi' + A''\Xi'')(B'\mathsf{H}' + B''\mathsf{H}''),$$

wobei sich die Verhältnisse $A' : A''$ und $B' : B''$ sowie die Constanten k und a aus den vier durch die Grenzbedingungen $\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ $\left(\text{d. i. } \frac{d\overline{\Xi}}{d\xi} = 0 \text{ bezw. } \frac{d\overline{\mathsf{H}}}{d\eta} = 0\right)$ gelieferten transcendenten Gleichungen bestimmen; wie diese Bestimmung auszuführen wäre, giebt *Weber*, der übrigens im Gegensatz zu dem von uns S. 92 ausgesprochenen Satze auch die Grenzbedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ mit constantem h für erfüllbar erklärt, nicht an, auch nicht bei den einfacheren gleich zu erwähnenden Fällen. — Für die eine der begrenzenden Parabeln kann auch die Coordinate ξ_2 bezw. η_2 *negativ* sein, d. h. das Gebiet kann in beliebiger Weise über die $+X$-Axe oder die $-X$-Axe hinübergreifen, was *Weber* überflüssiger Weise ausschliesst. Derselbe betrachtet gesondert den Fall, dass zwei Begrenzungslinien *derselben* Parabel angehören, so dass z. B. $\eta_2 = -\eta_1$ ist; in diesem Falle muss eine der Constanten B', B'' gleich 0 sein, weil $\mathsf{H}'(-\eta_1) = \mathsf{H}'(\eta_1)$ und $\mathsf{H}''(-\eta_1) = -\mathsf{H}''(\eta_1)$ ist, mit-

hin sowohl H' als H'' entweder der Grenzbedingung an beiden oder an keinem Stücke der Parabel $\eta = \pm \eta_1$ genügt. Man hat dann also zwei Classen von Normalfunctionen:

$$(A'\Xi' + A''\Xi'')\mathsf{H}' \quad \text{und} \quad (A'\Xi' + A''\Xi'')\mathsf{H}''$$

und bei beiden drei transcendente Gleichungen zur Berechnung von k, a, $A' : A''$. (Ganz analog wird es sich natürlich bei den entsprechenden Bereichen im elliptischen Coordinatensystem verhalten.) — Wird endlich die Begrenzung von nur *zwei* Parabeln: $\xi = \xi_1$, $\eta = \pm \eta_1$ gebildet, so dass der Bereich *den Brennpunkt in sich schliesst,* so hat man statt der Grenzbedingung für $\xi = \xi_2 = 0$ wieder die oben S. 123 besprochene *Stetigkeitsbedingung.* Dieselbe erfordert, dass die Normalfunctionen eine der beiden Formen $\Xi'\mathsf{H}'$, $\Xi''\mathsf{H}''$ haben, weil $\Xi'\mathsf{H}''$ und $\Xi''\mathsf{H}'$ nur auf dem rechts bezw. nur auf dem links vom Brennpunkte gelegenen Stücke der Abscissenaxe verschwinden würden. Hier sind also nur zwei transcendente Gleichungen zur Bestimmung von a und k vorhanden.

Irrthümlich ist wohl die Bemerkung *Weber's* (l. c. S. 34), zu jedem Werthe von k^2 gehöre eine *unendliche Reihe* von Werthen a, so dass sich die Normalfunctionen nach k^2 und a in eine *doppelt* unendliche Reihe ordnen würden. Gleiche Werthe von k^2, welche verschiedenen Normalfunctionen entsprechen, können, wie beim Rechteck, wahrscheinlich ausnahmsweise vorkommen, aber doch *nur mit beschränkter, nicht unendlich grosser Multiplicität.*

Die Orthogonalitäts-Eigenschaft lautet hier, wenn Ξ_1, Ξ_2 und H_1, H_2 den Grenzbedingungen entsprechend gewählte lineare Aggregate von Ξ', Ξ'' und H', H'' bezeichnen, welche zu den Werthepaaren k_1^2, a_1 und k_2^2, a_2 gehören, folgendermassen:

$$\iint \Xi_1 \Xi_2 \mathsf{H}_1 \mathsf{H}_2 (\xi^2 + \eta^2) d\xi d\eta = 0$$

und zerfällt nur im Falle $k_1^2 = k_2^2$ in

$$\int \Xi_1 \Xi_2 d\xi = \int \mathsf{H}_1 \mathsf{H}_2 d\eta = 0,$$

und im Falle $a_1 = a_2$ in

$$\int \xi^2 \Xi_1 \Xi_2 d\xi = \int \eta^2 \mathrm{H}_1 \mathrm{H}_2 d\eta = 0.$$

Mit den Integralen der Differentialgleichungen (40), den sogenannten „*Functionen des parabolischen Cylinders*“, hat sich nach H. Weber *K. Baer**) beschäftigt. Derselbe hat diese Functionen durch Reihen, welche Grenzfälle der hypergeometrischen sind, und daraus abgeleitete, von den Weberschen verschiedene bestimmte Integrale dargestellt und unter Anderem gezeigt, dass sie für specielle Werthe von $\frac{a}{k}$ sich auf *geschlossene Ausdrücke* (Exponentialfunctionen multiplicirt mit ganzen rationalen Functionen) reduciren. Sodann erörtert er die Coefficientenbestimmung in Reihenentwickelungen für willkürliche Functionen von einer bezw. zwei Variabeln nach Functionen des parabolischen Cylinders bezw. nach Producten aus solchen, indem er die Möglichkeit dieser Reihendarstellungen (welche für alle reellen Werthe der Variabeln bezw. für die ganze Ebene gelten sollen) voraussetzt. —

Es sei schliesslich noch daran erinnert, dass die im Vorhergehenden betrachteten, von confocalen ebenen Kegelschnitten begrenzten Bereiche auch in der Weise ausarten können, dass sie sich *in's Unendliche erstrecken*, z. B. dann, wenn die Begrenzung nur von zwei confocalen Hyperbeln oder von zwei confocalen Parabeln *derselben Schaar* gebildet wird; diese Fälle bedürften wohl noch einer besonderen Untersuchung, weil in der transformirten partiellen Differentialgleichung dann auch der Factor von u unendlich gross wird. Zieht man das physikalische Beispiel der schwingenden Membran heran, so würde es sich um die Schwingungen einer gleichmässig gespannten Membran von der Gestalt eines unendlichen Parallelstreifens handeln, deren Dichte in unendlicher Entfernung *unendlich gross* wird.

---

*) Programm des Realgymn. zu Küstrin, 1883.

b. *Gebiete auf der Kugelfläche, welche von vier confocalen sphärischen Kegelschnitten begrenzt werden.*

Wenn man in der Differentialgleichung der Kugelflächenfunctionen im allgemeinsten Sinne (31) statt ϑ, φ *elliptische* Coordinaten einführt, so nimmt sie ebenfalls eine Form an, welche die Zerspaltung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen gestattet. Die elliptischen Coordinaten auf der Kugelfläche vom Radius 1 werden definirt als die Wurzeln μ^2, ν^2 der Gleichung

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 0,$$

wobei $0 < \nu^2 < b^2 < \mu^2 < c^2$ sein soll. Es wird dann

$$x = \cos\vartheta = \frac{\mu\nu}{bc}, \quad y = \sin\vartheta\cos\varphi = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$z = \sin\vartheta\sin\varphi = \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}},$$

und wenn man als unabhängige Variabele nicht μ^2 und ν^2 selbst, sondern die elliptischen Integrale erster Art

$$\xi = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}}, \quad \eta = \int_0^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}$$

einführt, so geht die Differentialgleichung (31) über in:

$$(41) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + k^2(\mu^2 - \nu^2)u = 0;$$

μ und ν sind elliptische Functionen von ξ bezw. η, nämlich nach Jacobi'scher Schreibweise

$$\mu = c\Delta\,\mathrm{am}(\mathsf{K} - c\xi; \varkappa), \quad \nu = b\sin\mathrm{am}(c\eta; \varkappa'),$$

wobei der Modul durch $\varkappa^2 = \frac{c^2 - b^2}{c^2}$ gegeben ist.

Setzt man nun $u = \Xi\mathsf{H}$, so müssen Ξ und H den gewöhnlichen Differentialgleichungen genügen:

$$(41') \qquad \begin{aligned} &\frac{d^2\Xi}{d\xi^2} + (k^2\mu^2 - a)\,\Xi = 0, \\ &\frac{d^2\mathsf{H}}{d\eta^2} - (k^2\nu^2 - a)\,\mathsf{H} = 0, \end{aligned}$$

in denen a wieder eine zunächst willkürliche Constante bedeutet.

Führt man in der zweiten die rein imaginäre Variabele ηi ein, so erhalten beide genau die gleiche Form, nämlich, wenn man λ für μ^2 bezw. ν^2, t für das elliptische Integral $\int\limits_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda - b^2)(\lambda - c^2)}}$, A für k^2, B für $-a$, E für Ξ bezw. H schreibt, die nachstehende:

$$\frac{d^2 E}{dt^2} = (A\lambda + B) . E; \tag{41''}$$

mit dieser sog. *Lamé'schen* Gleichung haben sich zuerst *Lamé* und *Heine* beschäftigt, jedoch nur für specielle Fälle, während *F. Klein**) ihre Integrale bei *beliebig veränderlichem* A, B untersucht hat. — Nach dem Vorhergehenden sind Ξ und H *irgend zwei Particularlösungen* $E_1(\mu^2)$ und $E_2(\nu^2)$ *derselben Lamé'schen Gleichung* (41''), und u ist ein sog. *Lamésches Product* $E_1(\mu^2)\,E_2(\nu^2)$. In der soeben citirten Abhandlung hat nun *F. Klein* bewiesen, dass man die Constanten $A (= k^2)$ und $B (= -a)$ in der Differentialgleichung auf eine und nur eine Art so bestimmen kann, dass $E_1(\mu^2)$ und $E_2(\nu^2)$ an den Grenzen gegebener Intervalle den Grenzbedingungen $\overline{E} = 0$ oder $\frac{d\overline{E}}{d\lambda} = 0$ genügen**) und innerhalb jener Intervalle überall endlich und stetig sind und für $m - 1$ Werthe von μ^2 sowie für $n - 1$ Werthe von ν^2 verschwinden, wobei m, n irgend zwei ganze positive Zahlen sein können. Die durch diese Bedingungen charakterisirten Producte $\left(E_1(\mu^2)\,E_2(\nu^2)\right)_{m,n}$ sind offenbar die *Normalfunctionen eines*

---

*) *F. Klein*, über Körper, die von confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind. Math. Ann. XVIII, 412 ff. 1881.

**) Die zweite Grenzbedingung ist in der genannten Abhandlung nicht berücksichtigt; dagegen hat *F. Klein* in seiner Vorlesung über Lamé'sche Functionen stets die allgemeine Grenzbedingung $\frac{dE}{dt} : E =$ Const. in Betracht gezogen.

von zwei Paaren confocaler Kegel zweiten Grades ausgeschnittenen sphärischen Flächenstückes und würden z. B. die Schwingungsarten einer Luftschicht von dieser Gestalt darstellen. — Das hiermit bezeichnete „Oscillationstheorem" liesse sich übrigens auch durch dieselbe Betrachtung beweisen, welche ich S. 117—20 bei den von *ebenen* Kegelschnitten begrenzten Bereichen angewendet habe; denn die dortigen Schlüsse sind auf die Differentialgleichungen (41′) unmittelbar übertragbar, weil in allen Punkten des Gebietes $\mu^2 > \nu^2$ ist.

F. Klein hat a. a. O. auch erörtert, welche Modificationen eintreten müssen, wenn sich der gegebene Bereich über den durch die Brennpunkte gehenden Meridian (oder auch über eine der beiden anderen Coordinatenebenen) hinüber erstreckt oder, indem er sich durch einen Verzweigungsschnitt der über der Kugelfläche ausgebreitet zu denkenden unendlich vielblättrigen Riemann'schen Fläche hindurchzieht, sich selbst theilweise überdeckt; es muss dann, ganz ähnlich wie im Fall der ebenen Kegelschnitte, eine Erweiterung des Intervalles von ξ oder η eintreten.

Besonderes Interesse hat hier derjenige Grenzfall, wo das Gebiet, dessen Normalfunctionen zu bestimmen sind, die *volle Kugelfläche* ist, weil dann *alle Grenzbedingungen fortfallen* und an ihre Stelle die Forderung der *Stetigkeit und Eindeutigkeit* allein tritt. Die Lamé'schen Functionen müssen dann *ganze rationale Functionen* von μ^2 und ν^2, eventuell multiplicirt mit den Quadratwurzeln $\sqrt{\mu^2}$, $\sqrt{\mu^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\mu^2}$ und den analogen, sein, damit sie doppeltperiodische Functionen von ξ bezw. η werden. Dementsprechend muss $k^2 = n(n+1)$ sein, unter n eine *ganze* Zahl, welche den *Grad* der betreffenden Lamé'schen Functionen angiebt, verstanden, und B muss einer bestimmten algebraischen Gleichung n^{ten} Grades genügen. E_1 und E_2 sind dann die *Lamé'schen Functionen in dem engeren Sinne, in welchem dieselben von Lamé selbst eingeführt wurden*; $E_1(\mu^2)\ E_2(\nu^2)$ ist eine ganze homogene Fnnction n^{ten} Grades der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, und *die* $2n+1$ *zu demselben* n *gehörigen Lamé'schen Producte sind nur eine neue Anordnung*

der Kugelflächenfunctionen n^{ten} *Grades**) und zwar eine *orthogonale* Anordnung, da auch die zu einem und demselben n gehörigen Producte, wie schon *Lamé* gezeigt hat, die Orthogonalitätsbedingungen erfüllen. — In seiner ersten Abhandlung über Lamé'sche Functionen**) hat *F. Klein* gezeigt, dass sich die $2n + 1$ Lamé'schen Producte vom Grade n in ganz analoger Weise nach der Vertheilung ihrer Nulllinien auf die beiden Schaaren von sphärischen Kegelschnitten anordnen lassen, wie die $2n + 1$ Kugelflächenfunctionen nach der Vertheilung ihrer Nulllinien auf das System der Breitenkreise und das der Meridiane; dieser Beweis beruht auf dem Uebergange von dem elliptischen Coordinatensystem auf der Kugel (in welchem ja die Lage der Brennpunkte willkürlich ist) zum Polarcoordinatensysteme als einem Grenzfalle. Uebrigens ist der in Rede stehende Satz ja auch als Specialfall in dem S. 130—31 erwähnten, in der zweiten hierher gehörigen Arbeit *Klein's* aufgestellten Oscillationstheorem enthalten. — Es sei noch bemerkt, dass die Bäuche bei den Schwingungen einer sphärischen Luftschicht thatsächlich im Laufe der Zeit diese Veränderung (von sphärischen Kegelschnitten in Meridiane und Breitenkreise und umgekehrt) durchmachen können, da ja die Grösse n, und folglich k^2 oder die Schwingungszahl, für die dabei in Betracht kommenden Normalfunctionen übereinstimmt. —

Auf die S. 129 angegebene partielle Differentialgleichung (41) wird man auch geführt, wenn man die *Potentialgleichung* $\Delta V = 0$ *für einen von confocalen Flächen zweiten Grades begrenzten Raum* integriren will und zu diesem Zwecke zunächst $V = u \,.\, E_3(\varrho^2)$ setzt, unter $E_3(\varrho^2)$ eine Lamé'sche Function der dritten elliptischen Coordinate ϱ^2 verstanden. Man erhält dann für u allerdings die complicirtere Differentialgleichung

*) Man könnte sie daher *„zweiaxige Kugelfunctionen"* nennen (K.), welche Bezeichnung dann freilich einen anderen Sinn hat, wie die gleiche (biaxial harmonics) bei *Thomson* und *Tait.*

**) Math. Ann. XVIII, 237—46. 1881. — Wegen weiterer Entwickelungen, die an dieses Thema anknüpfen, vergl. *Stieltjes* (Acta math. VI, 1884), *Ljapounoff* (Mém. de St. Pétersbourg 1884) und *Poincaré* (Acta math. VII, 1885). —

$$(\varrho^2 - \nu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\varrho^2 - \mu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (\mu^2 - \nu^2)(A\varrho^2 + B)u = 0;$$

allein da verlangt wird, dass u von ϱ^2 *unabhängig* sein soll, so zerfällt dieselbe in *zwei*, von denen die eine, durch Nullsetzen des mit ϱ^2 multiplicirten Ausdruckes erhaltene gerade die schon betrachtete Form (41) hat. Es zeigt sich nun, dass die zweite partielle Differentialgleichung, welcher u genügen muss, identisch befriedigt wird, wenn man die erste durch *Lamé'sche Producte* integrirt, deren Factoren Particularlösungen derselben Lamé'schen Gleichung sind, welcher $E_3(\varrho^2)$ genügt; demnach findet auch das S. 130 besprochene Oscillationstheorem hier unverändert Anwendung. — Eine einfache physikalische Bedeutung in der Theorie der kleinen Schwingungen hat jedoch, wenn man μ^2, ν^2 als elliptische Coordinaten auf einer allgemeinen Fläche zweiten Grades betrachtet, die vorstehende partielle Differentialgleichung nicht.

c. *Raumgebiete, welche von sechs confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt werden.*

Nach Analogie der unter a) besprochenen, von confocalen Kegelschnitten begrenzten ebenen Bereiche werden sich im Raume als nächste Verallgemeinerung solche Gebiete der Behandlung darbieten, welche, allgemein zu reden, von sechs confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt werden; zu denselben gehören alle im Vorhergehenden behandelten Bereiche als Grenzfälle. — Man wird sich bei der Untersuchung solcher Gebiete natürlich der allgemeinen, durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

definirten elliptischen Coordinaten μ^2, ν^2, ϱ^2 bedienen, von denen je eine auf jeder Begrenzungsfläche constant ist. Führt man noch die Integrale

$$i\xi = \int_b^\mu \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}}, \quad \eta = \int_0^\nu \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}},$$

$$\zeta = \int_c^\varrho \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}}$$

ein, so geht die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ über in:

$$(\nu^2 - \varrho^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - (\varrho^2 - \mu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - (\mu^2 - \nu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}$$
$$+ k^2(\nu^2 - \varrho^2)(\varrho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)u = 0.$$

In Folge der Identitäten

$$(\varrho^2 - \mu^2) \quad + (\nu^2 - \varrho^2) \quad + (\mu^2 - \nu^2) \quad = 0,$$
$$(\varrho^2 - \mu^2)\nu^2 + (\nu^2 - \varrho^2)\mu^2 + (\mu^2 - \nu^2)\varrho^2 = 0,$$
$$(\varrho^2 - \mu^2)\nu^4 + (\nu^2 - \varrho^2)\mu^4 + (\mu^2 - \nu^2)\varrho^4$$
$$= -(\nu^2 - \varrho^2)(\varrho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)$$

kann man derselben in der That durch Producte $\Xi \cdot \mathrm{H} \cdot \mathrm{Z}$ genügen, wobei für Ξ die gewöhnliche Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$\frac{d^2 \Xi}{d \xi^2} + k^2\mu^4 + B\mu^2 + C = 0 \tag{42}$$

gilt, und für H und Z je eine analoge, in der nur ξ und μ durch ηi und ν bezw. durch ζi und ϱ zu ersetzen sind. —

Diese Differentialgleichung*) ist gleich sämmtlichen bisher betrachteten specielleren Differentialgleichungen ein specieller Fall einer Classe von Differentialgleichungen zweiter Ordnung (verallgemeinerten *Lamé*'schen Gleichungen), für welche *F. Klein* in seiner Vorlesung über Lamé'sche Functionen ganz allgemein das *Oscillationstheorem* aufgestellt hat, d. h. den Satz, dass man die in einer Differentialgleichung enthaltenen n willkürlichen Constanten (also in unserem Falle B, C und k^2) so bestimmen kann, dass in n gegebenen Intervallen particuläre Integrale, die bestimmten Grenzbedingungen genügen, je eine vorgeschriebene Anzahl von Nullstellen besitzen. Diesen wichtigen Satz wird *F. Klein* in einer demnächst in den Math. Annalen erscheinenden Abhandlung ausführlich entwickeln. —

Durch das Oscillationstheorem, verbunden mit dem Stetigkeitsprincip, ist die Möglichkeit, die sämmtlichen Normalfunctionen des betrachteten Raumgebietes in der Form von Producten $\Xi \mathrm{H} \mathrm{Z}$ von Integralen der Gleichung (42) darzu-

*) Obige Differentialgleichung (42) ist von derselben Form, wie die, durch welche *Heine* (Handbuch der Kugelfunct. I. S. 445—48) die „Cylinderfunctionen dritter Ordnung" definirt hat.

stellen, von vornherein erwiesen; doch würde die wirkliche Bestimmung der Constanten B, C, k^2 wohl noch grosse Schwierigkeiten bieten. Bisher ist nur der Specialfall des *abgeplatteten Rotationsellipsoides* behandelt worden, für welchen *Mathieu* (im letzten Capitel seines „Cours de physique mathématique") eine wenigstens im Falle geringer Excentricität der Meridianellipse brauchbare Lösung gegeben hat. Im Falle des abgeplatteten Rotationsellipsoides wird $b = 0$; führt man zwei Winkel ϑ und φ durch die Relationen

$$\mu^2 = b^2 \cos^2 \vartheta + c^2 \sin^2 \vartheta, \; \nu = b \cos \varphi$$

in die Differentialgleichungen für Ξ und H ein, so kann man nachher $b = 0$ setzen und erhält:

$$\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta}\left(\sin \vartheta \frac{d\Xi}{d\vartheta}\right) - (k^2 c^2 \sin^4 \vartheta - B \sin^2 \vartheta + C)\, \Xi = 0,$$

$$\frac{d^2 \mathsf{H}}{d\varphi^2} + C\mathsf{H} = 0.$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\mathsf{H} = a \cos \sqrt{C}(\varphi - \varphi_0),$$

und da u innerhalb des ganzen Ellipsoids *eindeutig* sein muss, so ist für C das Quadrat irgend einer *ganzen Zahl* zu setzen. Der Umstand, dass sich hier die eine der in den Differentialgleichungen auftretenden Constanten aus der Periodicitätsbedingung *unabhängig von den beiden anderen* bestimmt, ermöglicht gerade die Lösung des Problems für das Rotationsellipsoid. Das weitere Verfahren *Mathieu's* ist nun im Princip dasselbe, welches er bei der Ellipse anwandte. Er geht aus von der bekannten Lösung für den Fall $c = 0$ (wo Ξ eine abgeleitete Kugelflächenfunction $P_{m,n}(\cos \vartheta)$, Z eine Function $\dfrac{J_{m+\frac{1}{2}}(k\varrho)}{\sqrt{k\varrho}}$ und $B = m(m+1)$ wird), fügt den Ausdrücken für Ξ, Z, B, welche dann gelten würden, Reihen nach steigenden Potenzen von kc hinzu und bestimmt in diesen die Coefficienten so, dass Ξ in Bezug auf ϑ *periodisch* wird und Z für $\varrho = 0$ *endlich* bleibt. Natürlich ist dieses Verfahren nur anwendbar, so lange die Excentricität c klein ist, weil andernfalls die Convergenz jener Potenzreihen zweifelhaft wäre.

d. *Allgemeine Betrachtung über die bisher besprochenen Specialfälle.*

Alle bisher besprochenen Specialfälle waren solche, bei welchen die Normalfunctionen *als Producte aus Functionen je einer Coordinate* dargestellt werden konnten, also die Integration der partiellen Differentialgleichung auf diejenige von zwei oder drei *gewöhnlichen Differentialgleichungen* zurückgeführt wurde. Es entsteht nun die Frage, *wann dies überhaupt möglich ist.* Offenbar muss man zunächst, um durch Producte der angegebenen Art den Grenzbedingungen ($\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$) genügen zu können, solche Coordinaten einführen, von denen je eine längs jeder Begrenzungslinie oder -Fläche des gegebenen Bereiches *constant ist.* (Durch Einführung dieser Coordinaten wird der gegebene Bereich auf ein Rechteck bezw. Parallelepipedon abgebildet, natürlich im Allgemeinen nicht conform.) Die Differentialgleichung in diesen Coordinaten x, y oder x, y, z wird dann die Form (2) bezw. (3) S. 20 haben, worin jedoch a_0 gleich 0 vorausgesetzt werde. Für den Fall von *zwei* Dimensionen lässt sich nun, wie ich glaube, in der That eine allgemeine durch Producte integrirbare Form dieser partiellen Differentialgleichung angeben, während dies bei drei Variabeln, nach dem oben besprochenen Beispiel der Potentialgleichung in elliptischen Coordinaten zu schliessen, Schwierigkeiten bieten dürfte. Die erwähnte Form für zwei unabhängige Variabele lässt sich schreiben

$$(43)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_{22}(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + k^2\left(a_1(x)+a_2(y)\right)u = 0,$$

d. h. es muss (eventuell nach Abtrennung eines geeigneten gemeinsamen Factors) in der Gleichung (3) a_{11} nur von x, a_{22} nur von y abhängen und a die Summe einer Function von x allein und einer von y allein sein, wobei übrigens aber diese Functionen a_{11}, a_{22}, a_1, a_2 ganz beliebig sein können. Man überzeugt sich leicht, dass alle bisher vorgekommenen partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln sich in der That in dieser Form schreiben lassen.

Setzt man in der Gleichung (43) $u = X(x) \cdot Y(y)$, so kann man dieselbe in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zerspalten, *welche gerade die von Sturm betrachtete Form* (23) *haben.* Um aber die Sätze *Sturm's* anwenden zu können, muss der Factor von k^2 wenigstens in einer der beiden Differentialgleichungen, z. B. in der für X, für das ganze Intervall der unabhängigen Variabeln *positiv* sein. Dies kann man nun dadurch erreichen, dass man, wenn $\bar{a}_1(x)$ der grösste negative Werth von $a_1(x)$ ist, eine Constante a', welche $> -\bar{a}_1(x)$, sonst aber beliebig ist, zu $a_1(x)$ additiv und zu $a_2(y)$ subtractiv hinzufügt. Man erhält dann

$$(43') \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(a_{11}\frac{dX}{dx}\right) + (k^2(a_1 + a') - a)X = 0, \\ \frac{d}{dy}\left(a_{22}\frac{dY}{dy}\right) + (k^2(a_2 - a') + a)Y = 0, \end{aligned}$$

worin a eine zunächst willkürliche Constante bezeichnet. Auf diese Gleichungen kann man nun, um das *Oscillationstheorem* für die Normalfunctionen XY zu beweisen, diejenige Schlussweise anwenden, welche ich im Anfang dieses Paragraphen bei den Differentialgleichungen der „Functionen des elliptischen Cylinders" durchgeführt habe; dabei muss nur die Voraussetzung gemacht werden, dass im ganzen Gebiete $a_1(x) + a_2(y) \geqq 0$ ist. Denn man sieht leicht, dass für die genannte Schlussweise nur wesentlich ist, dass die eine der beiden Curven C_ξ, C_η von einem tieferen Punkte der a-Axe (Ordinatenaxe) ausgeht, für sehr grosse Werthe von k^2 grössere Ordinaten hat und in allen Punkten stärker ansteigt, als die andere, welche Bedingungen offenbar bei den Gleichungen (43') unter der Voraussetzung, dass $a_1(x) + a_2(y)$ *keine negativen Werthe* annimmt, erfüllt sind. Die letztere Voraussetzung ihrerseits ist bei allen physikalischen Problemen, bei denen unsere partielle Differentialgleichung auftritt, in Folge der Bedeutung des Factors von k^2u erfüllt; mathematisch lässt sie sich so formuliren: der (algebraisch) kleinste Werth, welchen $a_1(x)$ in dem gegebenen Intervalle $x_2 < x < x_1$ annimmt, vermehrt um den kleinsten Werth von $a_2(y)$ in dem für y vorgeschriebenen Intervalle, muss noch

$\geqq 0$ sein. Ist $a_1 + a_2$ *nicht* im ganzen Gebiete positiv, so lässt sich das Oscillationstheorem nur dann beweisen, wenn für eine Differentialgleichung von der Form (23) mit im gegebenen Intervalle *das Vorzeichen wechselndem* a_1 die Gültigkeit der Sturm'schen Sätze 5) und 6) S. 69, d. h. die Existenz einer Reihe von Lösungen, welche den bekannten Grenzbedingungen genügen und im Intervalle bezw. $0, 1, 2 \ldots m \ldots$ mal verschwinden, bekannt ist; man muss hier also die Betrachtungen des § 6, S. 71—72, zu Hülfe nehmen, und eine eingehendere Untersuchung dieses Falles wäre daher wünschenswerth. —

In dem Falle, wo die mehrerwähnte Voraussetzung erfüllt ist, lässt sich wieder durch das Continuitätsprincip plausibel machen, dass die durch die Anzahl der Verschwindungsstellen von Ξ und H charakterisirten Normalfunctionen $(\Xi\,\mathrm{H})_{m,n}$ auch die *sämmtlichen* existirenden sind. Denn die Differentialgleichung (43) gilt für die Schwingungen einer rechteckigen Membran, deren Spannungen parallel den beiden Seitenpaaren durch $a_{11}(x)$ und $a_{22}(y)$ und deren Dichtigkeit bis auf einen constanten Factor durch $a_1 + a_2$ gegeben ist, und es ist nun physikalisch plausibel, dass die Anzahl der jedem Seitenpaare parallelen Knotenlinien bestehen bleibt (natürlich unter Parallelverschiebung derselben und Aenderung der Tonhöhe), wenn man die Spannungen und Dichte durch continuirliche Aenderung constant werden lässt, so dass man also bei diesem Uebergang gerade die sämmtlichen Schwingungsarten der homogenen rechteckigen Membran und jede nur einmal erhalten muss.

Wenn irgend ein ebener Bereich gegeben ist, für welchen die ausgezeichneten Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ gefunden werden sollen, so wird man, wie wir schon sagten, immer versuchen, solche Coordinaten einzuführen, von welchen je eine längs der Begrenzungscurve bezw. längs der einzelnen Stücke derselben (es wird immer eine Begrenzung aus Stücken analytischer Curven vorausgesetzt) constant ist; hierdurch wird der gegebene Bereich auf die Fläche eines *Rechtecks* abgebildet. Diese Abbildung kann nun insbesondere eine *conforme* sein, und in

der That entspricht die Einführung der elliptischen und parabolischen Coordinaten, welche in diesem Paragraphen unter (a) besprochen wurde, stets einer derartigen conformen Abbildung. *H. Weber* hat nun a. a. O. untersucht, für welche ebenen Bereiche es mit Hülfe dieser conformen Abbildung, d. h. mittelst Einführung neuer Coordinaten ξ, η durch die Relation

$$x + iy = f(\xi + i\eta)$$

gelingt, die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$$

durch *Producte* $\Xi(\xi) \cdot \mathrm{H}(\eta)$ zu integriren. Die Bedingung hierfür ist, da die Differentialgleichung die Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + k^2 f'(\xi + i\eta) f_1'(\xi - i\eta) \cdot u = 0$$

annimmt*), nach dem Vorhergehenden die, dass

$$f'(\xi + i\eta) f_1'(\xi - i\eta)$$

die Summe einer Function von ξ allein und einer solchen von η allein ist, und dies erfordert die Relation

$$\frac{f'''(\xi + i\eta)}{f'(\xi + i\eta)} = \frac{f_1'''(\xi - i\eta)}{f_1'(\xi - i\eta)} = \text{Const.},$$

wo die oberen Indices die Ableitung nach dem ganzen Argument von f bezw. f_1 bedeuten. Wird die Constante in der vorstehenden Gleichung speciell gleich *Null* gesetzt, so wird $f(\xi + i\eta)$ eine *ganze Function zweiten Grades*, und man kommt auf die *parabolischen* Coordinaten; im Allgemeinen ergiebt sich für f eine *Exponential-* bezw. *trigonometrische* Function, was auf die *elliptischen* Coordinaten und in einem speciellen Fall auf die gewöhnlichen *Polarcoordinaten* führt. Die schon besprochenen ebenen Bereiche sind demnach die einzigen, für welche die *conforme Abbildung* in der angegebenen Weise zum Ziele führt.

---

*) Vergl. I, § 4, S. 28, 29; dort stehen F, x', y' statt der hier gebrauchten f, ξ, η.

§ 9. Bereiche, welche aliquote Theile von schon behandelten sind.

Ausser den in §§ 6—8 behandelten Bereichen giebt es noch eine Anzahl anderer, für welche man die sämmtlichen Normalfunctionen bei den Grenzbedingungen $\bar{u} = 0$, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ oder auch $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ herstellen kann; es sind dies, allgemein zu reden, solche Bereiche, welche *aliquote Theile schon behandelter* sind, d. h. aus welchen man dadurch, dass man sie *in Bezug auf eine oder mehrere ihrer Begrenzungslinien spiegelt oder „symmetrisch wiederholt“*, Bereiche zusammensetzen kann, deren sämmtliche Normalfunctionen man bereits kennt. Hierin ist auch der Fall enthalten, dass die Spiegelung *unendlich oft* wiederholt werden muss, und dass der dadurch erhaltene schon behandelte Bereich die *unbegrenzte Ebene* oder der *unbegrenzte Raum* ist. Man kann sogar die Bereiche, um welche es sich hier handelt, allerdings in etwas geringerer Allgemeinheit, dadurch definiren, *dass sie durch fortgesetzte symmetrische Wiederholung in Bezug auf ihre Begrenzung die unendliche Ebene, den unendlichen Raum oder die volle Kugelfläche lückenlos einfach zu überdecken vermögen, vorbehaltlich einer unten zu erörternden Beschränkung.* Aus der letzteren Definition geht hervor, dass nur solche ebenen, räumlichen bezw. sphärischen Bereiche in Betracht kommen, welche von lauter geraden Linien, Ebenen bezw. grössten Kreisen begrenzt werden. Die allgemeinere Eigenschaft, durch symmetrische Wiederholung in Bezug auf ein Stück der Begrenzung schon behandelte Gebiete zu liefern, kommt ausserdem noch solchen Bereichen zu, welche selbst schon specielle Fälle der in §§ 7 und 8 besprochenen sind (z. B. einem Kreissector, einem von zwei confocalen Ellipsen, einem halben Hyperbelast und einem Stück der grossen oder kleinen Axe begrenzten Flächenstücke) und daher keine besondere Behandlung an dieser Stelle erfordern. Uebrigens sind auch in der zweiten Definition noch solche Bereiche enthalten, nämlich die Rechtecke in der Ebene, die rechtwinkligen Parallelepipeda im

Raume und die Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}$ auf der Kugel. Sieht man von diesen ab und zunächst auch von dem ebenen *gleichseitigen Dreiecke*, so sind die durch symmetrische Wiederholung zusammensetzbaren schon behandelten Bereiche das *Quadrat* und der *Würfel*, also solche Gebiete, *welchen mehrfache ausgezeichnete Werthe von k^2 zukommen.* (Dies gilt auch von den später zu nennenden Bereichen insofern, als alle ausgezeichneten Werthe für die unendliche Ebene und den unendlichen Raum unendlich vielfache, auch jene für die volle Kugelfläche stets mehrfache sind.) Auf diesem Umstande beruht gerade die Möglichkeit, die Normalfunctionen der neuen, hier zu betrachtenden Bereiche aus denjenigen der aus ihnen zusammengesetzten Bereiche abzuleiten; man addirt nämlich die zu einem und demselben k^2 gehörigen Normalfunctionen des ursprünglichen Bereiches, nachdem sie mit willkürlichen Constanten multiplicirt sind, und bestimmt die Verhältnisse jener willkürlichen Constanten so, dass der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ auch an denjenigen Linien oder Ebenen, welche den ursprünglichen Bereich in die neuen zerschneiden, genügt wird, ein Verfahren, welches künftig als „Auswahl der Normalfunctionen des Theilbereiches unter den ausgezeichneten Lösungen des ursprünglichen Bereiches“ bezeichnet werden möge. Dieses Verfahren ist natürlich nur anwendbar, wenn für die neu auftretende Begrenzungsgerade oder -Ebene die Bedingung $\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ gestellt ist, und zwar hat man in diesem Falle unter den ausgezeichneten Lösungen des ursprünglichen Bereiches die in Bezug auf jene Gerade oder Ebene *antisymmetrischen* oder *symmetrischen* auszuwählen, jenachdem die Bedingung $\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ gefordert ist. Wenn für die neue Begrenzung die Grenzbedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ bestehen soll, so sind die Normalfunctionen des Theilbereiches *nicht* aus denen des ursprünglichen zusammensetzbar.

Aus dem soeben Gesagten ist ersichtlich, dass man aus den der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ genügenden Normalfunctionen des ursprünglichen Bereiches diejenigen des Theilbereiches nicht nur für die Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ längs der ganzen Begrenzung, sondern auch für *gemischte Grenzbedingungen*, d. h. z. B. $\bar{u} = 0$ längs der mit dem ursprünglichen Bereiche gemeinsamen, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ längs der neuen Begrenzungstheile, ableiten kann. Um daher *umgekehrt* aus den Normalfunctionen eines gegebenen Bereiches die *sämmtlichen* Normalfunctionen eines grösseren, durch *symmetrische Wiederholung* des ersteren erhaltenen Bereiches ableiten zu können, müsste man nicht nur die sämmtlichen Normalfunctionen des ersteren für eine der Bedingungen $\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ längs der ganzen Begrenzung, sondern auch diejenigen für *gemischte* Grenzbedingungen kennen; andernfalls wird man nur *specielle* Normalfunctionen des zusammengesetzten Bereiches finden können.

Es ist nun weiter festzustellen, welches die in dem Satze S. 140 angedeutete Beschränkung ist, d. h. für *welche* von denjenigen Bereichen, die durch symmetrische Wiederholung die unendliche Ebene oder den unendlichen Raum oder die volle Kugelfläche einfach und lückenlos überdecken, überhaupt die Normalfunctionen aus bisher bekannten ausgezeichneten Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ abgeleitet werden können. *Die ausgezeichneten Lösungen für die unendliche Ebene und den unendlichen Raum können definirt werden als überall, auch im Unendlichen, eindeutige, endliche und stetige Lösungen.* Unter diesen sind nun, da der Bedingung $\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ auf einem Systeme sich periodisch wiederholender geradliniger Begrenzungen genügt werden soll, *die in Bezug auf die rechtwinkligen Coordinaten x und y periodischen* zu benutzen, also *trigonometrische Functionen linearer Aggregate von x und y.* Dass man nur *periodische* Lösungen gebrauchen kann, folgt daraus, dass man andernfalls für den zu betrachtenden Theil-

bereich unendlich viele verschiedene, zu demselben k^2 gehörige Normalfunctionen erhalten würde. Solche trigonometrischen Functionen und ihre Differentialquotienten nach einer bestimmten Richtung verschwinden nun, wie man sich leicht überzeugt, nur *längs gewisser Schaaren unbegrenzter gerader Linien bezw. Ebenen.* Daraus folgt, dass man auf dem angegebenen Wege die *sämmtlichen* Normalfunctionen *nur für solche Bereiche* finden kann, *welche aus der Ebene bezw. dem Raume durch Schaaren äquidistanter paralleler gerader Linien bezw. Ebenen ausgeschnitten werden* und ausserdem durch *symmetrische Wiederholung* die ganze Ebene bezw. den ganzen Raum einfach und lückenlos ausfüllen. Die erstere Bedingung kann man auch so aussprechen: *die Anzahl der ebenen Bereiche, die in einem Punkte, und der räumlichen Bereiche, die in einer Kante zusammentreffen, muss stets gerade sein*; denn wäre sie ungerade, so würden nur unendlich viele *Stücke* von geraden Linien und Ebenen, nicht letztere in ihrer ganzen Erstreckung die Grenzen der Bereiche bilden. Diese Bedingung, welche die auf S. 140 in Aussicht gestellte Beschränkung bildet, ergiebt sich auch durch folgende, gewissermassen umgekehrte Betrachtung. Hat man für einen von Geraden bezw. Ebenen begrenzten Bereich, welcher der allgemeinen Definition (S. 140) entspricht, irgend eine der Grenzbedingung 1) $\bar{u} = 0$ oder 2) $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ an seiner ganzen Begrenzung genügende Normalfunction u gefunden, so kann man dieselbe in bekannter Weise über die Begrenzung hinaus analytisch fortsetzen, und zwar muss dies im ersten Fall nothwendig *antisymmetrisch*, im zweiten *symmetrisch* geschehen, weil eine Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ längs einer Linie oder Fläche nicht zugleich mit ihren ersten Differentialquotienten verschwinden kann, wie wir im III. Theile noch ausführlicher sehen werden. Wenn nun der Winkel zwischen zwei Begrenzungslinien bezw. -Flächen des gegebenen Bereiches nicht $\frac{\pi}{n}$, unter n eine ganze Zahl verstanden, sondern $\frac{2\pi}{2n+1}$ betrüge, so würde die analytisch fortgesetzte Function u nach einmaliger Umlaufung der betreffenden Ecke bezw. Kante *das*

Vorzeichen gewechselt haben, also *nicht* in der ganzen Ebene bezw. dem ganzen Raume *eindeutig* sein.

Ausgeschlossen werden durch die erörterte Beschränkung von ebenen Bereichen der *Rhombus und das gleichschenklige Dreieck vom Winkel* 120°, sowie das *regelmässige Sechseck*, von räumlichen z. B. das *Rhombendodekaëder*, mit welchen Bereichen man sonst durch symmetrische Wiederholung die Ebene bezw. den Raum einfach und lückenlos ausfüllen könnte; diejenigen Normalfunctionen dieser Bereiche, welche nicht schon ihren später zu erwähnenden aliquoten Theilen (z. B. dem gleichseitigen Dreieck) angehören, sind also *keine* trigonometrischen, sondern weit complicirtere Functionen, deren Kenntniss übrigens vom mathematischen Standpunkte gerade sehr interessant sein würde.

Die *ebenen* Bereiche, welche wir gemäss der nunmehr beschränkten Definition hier zu betrachten haben werden, sind nun folgende: das *gleichschenklige rechtwinklige Dreieck*, das *gleichseitige Dreieck* und das *rechtwinklige Dreieck mit den Winkeln* 30° *und* 60° (ausserdem das Rechteck und seine Grenzfälle, die wir natürlich bei Seite lassen).

Im *Raume von drei Dimensionen* kommen in Betracht*): zunächst diejenigen *geraden Prismen*, welche zum Querschnitt einen der soeben genannten ebenen Bereiche haben, sodann *zwei Tetraëder, die aliquote Theile des Würfels sind;* die eine Art (das „tétraèdre $\frac{1}{6}$“ *Lamé's*) liefert den ganzen Würfel nach sechsmaliger Spiegelung und hat die Flächenwinkel $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ und zu Seitenflächen zwei gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke und zwei rechtwinklige Dreiecke vom Kathetenverhältniss $1 : \sqrt{2}$; die Tetraëder der anderen Art („tétraèdre $\frac{1}{24}$“), von welchen 24 den Würfel ausfüllen, besitzen die Flächenwinkel $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ und haben

---

*) Ueber das allgemeine Problem der regelmässigen Raumtheilung vergleiche man die Arbeiten von *A. Schönflies*, Math. Annalen **28**, **29** und **34**.

eine, den einen rechten Winkel halbirende Symmetrieebene, durch welche sie in zwei Tetraëder der ersten Art getheilt werden.

Für Bereiche, *welche symmetrisch wiederholt die ganze Kugelfläche einfach und lückenlos überdecken*, ergiebt sich, damit ihre Normalfunctionen durch geeignete Auswahl der ausgezeichneten Lösungen für die Kugelfläche, d. i. der *Kugelflächenfunctionen im gewöhnlichen Sinne* (Laplace'schen Functionen), zu erhalten sind, auf Grund geometrischer Untersuchungen, die in der Functionentheorie wohl bekannt sind*), ebenfalls die Bedingung, *dass in jeder Ecke eine gerade Anzahl von Theilbereichen zusammenstossen muss.* Die letzteren müssen demnach *sphärische Dreiecke* sein, und zwar solche, *die von Symmetrieebenen regulärer Polyeder ausgeschnitten werden*, oder aber solche mit zwei rechten Winkeln und einem Winkel von $\frac{\pi}{n}$. Die letzteren, zu denen insbesondere auch der *Kugelflächenoctant* gehört, brauchen, wie schon oben erwähnt, hier nicht noch einmal betrachtet zu werden. Zur ersteren Art gehören nur die sphärischen Dreiecke mit folgenden Winkeln: $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$, ausgeschnitten durch die Symmetrieebenen des *Tetraëders* und $\frac{1}{24}$ der ganzen Kugelfläche bedeckend; $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$, ausgeschnitten durch die Symmetrieebenen des *Octaëders oder Würfels*, die Hälfte des vorigen; $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$, ausgeschnitten durch die Symmetrieebenen des *Pentagondodekaëders oder des Ikosaëders*, $\frac{1}{120}$ der Kugelfläche.

Wir wenden uns jetzt zur speciellen Besprechung der ausgezeichneten Lösungen für die im Vorhergehenden aufgezählten Bereiche. Dabei brauchen wir aber auf die aliquoten Theile des Quadrates, quadratischen Prismas und Würfels nicht näher einzugehen, weil dieselben nichts wesentlich Neues bieten. Es sei in Betreff dieser Bereiche auf *Lamé's*

---

*) Vergl. *H. A. Schwarz*, Crelle's Journal 75, 1872.

ausführliche Darstellung in der „*Théorie de la chaleur*“, 1861, (p. 111—149 u. 347—391) hingewiesen, wo für dieselben nicht nur die Normalfunctionen $u_{m,n}$ für die verschiedenen Grenzbedingungen aufgestellt, sondern auch jedesmal die Integrale $\iint u_{m,n}^2 df$ bezw. $\iiint u_{mn}^2 dv$ berechnet werden, welche man ja kennen muss, um die Coefficienten der Entwickelung einer willkürlichen Function nach jenen Normalfunctionen bestimmen zu können (oder auch den constanten Factor, welchen man in die Normalfunctionen aufnehmen muss, damit sie genau der auf S. 57 gegebenen Definition entsprechen). — Als Beispiel mögen hier nur die Lösungen für das *gleichschenklige rechtwinklige Dreieck* von der Kathete a angeführt werden. Die Seiten des Dreiecks seien: $y = 0$, $x = 0$, $x + y = a$. Dann erhält man*), wenn auf allen drei Seiten $\bar{u} = 0$ sein soll:

$$u_{m,n} = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a} + (-1)^{m+n+1}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{a};$$

wenn auf allen drei Seiten $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ sein soll:

$$u_{m,n} = \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a} + (-1)^{m+n}\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{a};$$

wenn auf den Katheten $\bar{u} = 0$, auf der Hypotenuse $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) = 0$ gefordert ist:

$$u_{m,n} = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a} + (-1)^{m+n}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{a};$$

endlich, wenn umgekehrt für die Hypotenuse $\bar{u} = 0$, für die Katheten $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ vorgeschrieben ist:

$$u_{m,n} = \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a} + (-1)^{m+n+1}\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{a};$$

in allen Fällen ist $k_{m,n}^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (m^2 + n^2)$. *Mehrfache* ausgezeichnete Werthe sind hier nur noch diejenigen, für welche sich $m^2 + n^2$ noch auf mindestens *eine* andere Weise in die Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen zerlegen lässt; denn

*) *Lamé*, Théorie de la chaleur, p. 111—129.

eine blosse Vertauschung von m und n (oder von x und y) ändert jetzt die Normalfunctionen entweder gar nicht oder nur ihr Vorzeichen. — Sind die Grenzbedingungen $l\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ für die Katheten, $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ für die Hypotenuse mit *constantem* l und h zu befriedigen, so sind die Normalfunctionen von der Form*)

$$u_{m,n} = \cos\frac{m\pi(x - x_0)}{a}\cos\frac{n\pi(y - y_0)}{a}$$

$$\pm\cos\frac{n\pi(x - y_0)}{a}\cos\frac{m\pi(y - x_0)}{a},$$

wobei das obere Vorzeichen eine Reihe in Bezug auf die Höhe $y = x$ symmetrischer, das untere eine Reihe in Bezug auf dieselbe antisymmetrischer Normalfunctionen liefert. Die Constanten x_0, y_0, m, n bestimmen sich durch die transcendenten Gleichungen

$$\operatorname{tg}\frac{m\pi x_0}{a} = \frac{la}{m\pi}, \quad \operatorname{tg}\frac{n\pi y_0}{a} = \frac{la}{n\pi},$$

$$\operatorname{tg}\pi\left(\frac{m+n}{2} - \frac{mx_0 + ny_0}{a}\right) = \frac{a}{\pi}\,\frac{h\sqrt{2}}{m+n} \text{ oder } = -\frac{\pi}{a}\,\frac{m+n}{h\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{tg}\pi\left(\frac{m-n}{2} - \frac{mx_0 - ny_0}{a}\right) = \frac{a}{\pi}\,\frac{h\sqrt{2}}{m-n} \text{ oder } = -\frac{\pi}{a}\,\frac{m-n}{h\sqrt{2}},$$

wo auf der rechten Seite der beiden letzten Gleichungen der erste oder zweite Ausdruck zu setzen ist, je nachdem in dem obigen Ausdruck für $u_{m,n}$ das obere oder untere Vorzeichen gewählt wird. Die ausgezeichneten Werthe von k^2 sind nach wie vor durch $\left(\frac{\pi}{a}\right)^2(m^2 + n^2)$ gegeben. —

Gemäss der Bemerkung auf S. 141 sind die zuletzt betrachteten $u_{m,n}$ *nicht* unter den Normalfunctionen des Quadrates bei der Grenzbedingung $l\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ enthalten, und analog würde es sich bei den beiden Arten von *Tetraëdern* verhalten, wenn für solche Begrenzungsflächen, welche bei der Zusammensetzung der Tetraëder zum Würfel in das *Innere* des letzteren

*) *Lamé*, l. c. p. 347 ff.

zu liegen kommen, die Grenzbedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ zu erfüllen wäre. Doch hat *Lamé* auch für diese Fälle die Normalfunctionen in der Gestalt von Aggregaten trigonometrischer Functionen (bestehend aus sechs Gliedern, deren jedes drei Cosinus-Factoren enthält) aufgestellt, ohne aber mitzutheilen, auf welchem Wege er dazu gelangt ist. —

Mehr Interesse bietet der Fall des *gleichseitigen Dreiecks* (oder des Prismas mit gleichseitigem Dreieck als Querschnitt), welcher von *Lamé* ausführlich in der „Théorie de la chaleur" (p. 149—207 und 347—371), sowie auch gelegentlich der Schwingungen einer gleichseitig dreieckigen Membran in seinen „Leçons sur la théorie de l'élasticité" (1866) behandelt worden ist. Da dieses Problem sonst in der Litteratur wenig Berücksichtigung gefunden hat (kurze Notizen darüber finden sich bei *Rayleigh* und *Routh*), so ist vielleicht angebracht, hier näher darauf einzugehen.

Lamé hat sich bei der Aufstellung der Normalfunctionen des gleichseitigen Dreiecks nicht der rechtwinkligen, sondern einer Art von *Dreieckscoordinaten* bedient; er führt nämlich als Coordinaten eines Punktes dessen Abstände P, P', P'' von denjenigen drei Geraden ein, welche man parallel zu den Seiten durch den Mittelpunkt des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises ziehen kann. Ist der Radius des letzteren r, so liegen die Werthe von P, P', P'' für alle Punkte innerhalb des Dreiecks zwischen $+r$ und $-2r$, und die Seiten werden dargestellt durch die Gleichungen $P = r$, $P' = r$, $P'' = r$; zwischen P, P' und P'' besteht die Relation $P + P' + P'' = 0$. Liegt der Nullpunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems XY im Punkte $P = P' = P'' = 0$ und bilden die Dreiecksseiten mit der X-Axe die Winkel $\alpha, \alpha', \alpha''$, so ist

$$P = x \cos\alpha + y \sin\alpha, \quad P' = x\cos\alpha' + y\sin\alpha',$$
$$P'' = x\cos\alpha'' + y\sin\alpha''.$$

Da nun, wie wir gesehen haben, die Normalfunctionen des gleichseitigen Dreiecks *trigonometrische* Functionen linearer

Aggregate von x, y sind, so müssen sie auch solche von P, P', P'' sein, also von der Form

$$\cos(lP + mP' + nP'' + p), \tag{44}$$

wo l, m, n, p Constanten sind. Soll der vorstehende Ausdruck der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügen, so muss, wie man mit Rücksicht auf die obigen Formeln für P, P', P'' sofort findet,

$$k^2 = l^2 + m^2 + n^2 + 2mn\cos(\alpha' - \alpha'') + 2nl\cos(\alpha'' - \alpha) \\ + 2lm\cos(\alpha - \alpha')$$

sein, oder, da $\alpha' - \alpha'' = \alpha'' - \alpha = \alpha - \alpha' = -\frac{2\pi}{3}$ ist,

$$k^2 = l^2 + m^2 + n^2 - mn - ln - ml.$$

In dem Argumente des cos. in (44) kann man die drei Zahlen l, m, n beliebig *mit einander vertauschen* und ausserdem p willkürlich, $\left(\text{z. B.} = 0 \text{ und } \frac{\pi}{2}\right)$, wählen, ohne dass sich der Werth von k^2 ändert; demnach gehören zu einem und demselben k^2 zunächst zwölf verschiedene trigonometrische Ausdrücke von der Form (44).

Soll nun längs der drei Seiten, d. h. für $P = r$, $P' = r$, $P'' = r$, die Bedingung $\bar{u} = 0$ erfüllt sein, so müssen, wie *Lamé* gefunden hat (er theilt nur die Verification mit), l, m, n bezw. gleich $\frac{2\pi}{9r}\lambda$, $\frac{2\pi}{9r}\mu$, $\frac{2\pi}{9r}\nu$ sein, wobei λ, μ, ν irgend drei der Bedingung

$$\lambda + \mu + \nu = 0$$

genügende *ganze Zahlen* sind; ferner können die zwölf Ausdrücke von der Form (44) nur in *zwei* verschiedenen Verbindungen zu je 6 auftreten. Diese zwei Ausdrücke können, wie ja immer die Normalfunctionen im Falle eines zweifachen ausgezeichneten Werthes, auf unendlich mannigfaltige Weise ausgewählt werden; *Lamé* bestimmt sie so, dass sie bequem zur Herstellung der ausgezeichneten Lösungen für das *halbe* gleichseitige Dreieck (also das rechtwinklige Dreieck mit

einem Winkel von 30°) zu benutzen sind, — was mit der Bevorzugung einer Coordinate, z. B. P, vor den beiden andern verknüpft ist. Setzt man

$$(45)\quad \begin{cases} \frac{2\pi}{9r}(\lambda P + \mu P' + \nu P'' + 3\lambda r) = A_1, \\ \frac{2\pi}{9r}(\mu P + \nu P' + \lambda P'' + 3\mu r) = A_2, \\ \frac{2\pi}{9r}(\nu P + \lambda P' + \mu P'' + 3\nu r) = A_3, \\ \frac{2\pi}{9r}(\nu P + \mu P' + \lambda P'' + 3\nu r) = A_1', \\ \frac{2\pi}{9r}(\mu P + \lambda P' + \nu P'' + 3\mu r) = A_2', \\ \frac{2\pi}{9r}(\lambda P + \nu P' + \mu P'' + 3\lambda r) = A_3', \end{cases}$$

und:

$$\sin A_i = s_i,\ \sin A_i' = s_i',\ \cos A_i = c_i,\ \cos A_i' = c_i'\ (i = 1, 2, 3),$$

so sind

$$(45')\quad \begin{aligned} u_1 &= c_1 - c_1' + c_2 - c_2' + c_3 - c_3', \\ u_2 &= s_1 + s_1' + s_2 + s_3' + s_3 + s_3' \end{aligned}$$

jene beiden von *Lamé* ausgewählten ausgezeichneten Lösungen. In Bezug auf die zur Seite $P = r$ senkrechte Höhenlinie (auf welcher $P' = P''$ ist) ist offenbar u_1 *antisymmetrisch*, u_2 *symmetrisch*, woraus folgt, dass das über die ganze Fläche des Dreiecks erstreckte Integral $\int\int u_1 u_2 dx dy$ verschwindet. Demnach sind u_1 und u_2 *zu einander orthogonal* und bis auf geeignete constante Factoren $\left(\text{die beide} = \frac{1}{qr^2\sqrt{3}} \text{ sind}\right)$ *Normalfunctionen des gleichseitigen Dreiecks* bei der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$, aus welchen sich alle anderen zu demselben Werthe

$$k^2 = \frac{3}{2}(l^2 + m^2 + n^2) - \frac{1}{2}(l + m + n)^2$$
$$= \frac{2}{27}\left(\frac{\pi}{r}\right)^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$$

gehörenden ausgezeichneten Lösungen linear zusammensetzen

lassen, z. B. diejenigen, welche in Bezug auf eine der beiden anderen Höhenlinien symmetrisch oder antisymmetrisch sind und somit aus u_1, u_2 durch cyklische Vertauschung von P, P', P'' erhalten werden.

Bei der Grenzbedingung $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ sind

$$u_1' = s_1 - s_1' + s_2 - s_2' + s_3 - s_3',$$
$$u_2' = c_1 + c_1' + c_2 + c_2' + c_3 + c_3'$$

die beiden zum Werthe $k^2 = \frac{2}{27}\left(\frac{\pi}{r}\right)^2 (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$ gehörigen Normalfunctionen, von denen die eine (u_2') symmetrisch, die andere (u_1') antisymmetrisch in Bezug auf die Höhenlinie $P' = P''$ ist.

In Folge der genannten Symmetrieeigenschaften sind u_1, u_2, u_1', u_2' auch Normalfunctionen des *rechtwinkligen Dreiecks mit einem Winkel von* 30^0, welches die Hälfte des durch die Höhe $P' = P''$ getheilten gleichseitigen Dreiecks bildet, und zwar gelten sie, wenn man die Hypotenuse mit c, die kürzere Kathete mit a, die längere mit b bezeichnet, bei folgenden Grenzbedingungen:

u_1 für $\bar{u} = 0$ auf a, b und c,

u_2 für $\bar{u} = 0$ auf a und c, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ auf b,

u_1' für $\bar{u} = 0$ auf b, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ auf a und c,

u_2' für $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ auf a, b und c.

Die ausgezeichneten Werthe k^2 sind in allen diesen Fällen *dieselben*, wie beim gleichseitigen Dreieck, jedoch sind sie im Allgemeinen nur *einfache*.

Lamé hat auch für die Grenzbedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ (mit gleichem und constantem h an allen drei Seiten) diejenigen Normalfunctionen des gleichseitigen Dreiecks, welche in Bezug auf alle drei Höhenlinien symmetrisch sind, in der Gestalt von Aggregaten trigonometrischer Functionen aufgestellt (l. c. p. 356—63); doch kann hier auf die be-

treffenden sehr umständlichen Entwickelungen nicht eingegangen werden. Dagegen mögen noch einige Bemerkungen über die ausgezeichneten Werthe von k^2 und die Knotenlinien für das *gleichseitige Dreieck bei der Grenzbedingung* $\bar{u} = 0$ Platz finden.

Oben wurde erwähnt, dass $k^2 = \frac{2}{27}\left(\frac{\pi}{r}\right)^2 (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$ ist, wo λ, μ, ν drei ganze Zahlen bedeuten, deren Summe gleich Null ist; diese drei Zahlen unterliegen noch der weiteren Beschränkung, *dass keine von ihnen* $= 0$ *sein darf*, weil in diesem Falle u_1 und u_2 sich beide auf 0 reduciren würden. Indem man der Bedingung $\lambda + \mu + \nu = 0$ entsprechend $\lambda^2 = (\mu + \nu)^2$ einsetzt, erhält man die bequemere Formel

$$k^2 = \frac{4}{27}\left(\frac{\pi}{r}\right)^2 (\mu^2 + \mu\nu + \nu^2), \tag{46}$$

worin nun μ, ν *irgend zwei von einander unabhängige, positive oder negative ganze Zahlen sind, welche nur aus dem soeben angeführten Grunde der Bedingung unterworfen sind, dass weder eine von ihnen für sich, noch ihre Summe* $= 0$ *ist.* Man kann endlich auch schreiben

$$k^2 = \frac{1}{27}\left(\frac{\pi}{r}\right)^2 (\mu'^2 + 3\nu'^2), \tag{46'}$$

indem man $\mu + \nu = \nu'$, $\mu - \nu = \mu'$ setzt; den ganzen Zahlen μ', ν' muss man dann jedoch eine grössere Anzahl von Beschränkungen auferlegen, nämlich folgende: sie dürfen dem absoluten Werthe nach nicht gleich sein, sie müssen beide gerade oder beide ungerade sein, ν' darf nicht $= 0$ sein. — Man sieht aus (46), weil man darin μ mit ν vertauschen kann, ohne dass sich die rechte Seite ändert, *dass die ausgezeichneten Werthe k^2 für das gleichseitige Dreieck mindestens zweifach sind, sofern nicht* $\mu = \nu$ *ist.*

Was zunächst den letztgenannten speciellen Fall ($\mu = \nu$) betrifft, so wird in demselben

$$k^2_{\mu,\mu} = \left(\frac{2\pi}{3r}\right)^2 \cdot \mu^2 = k^2_{1,1} \cdot \mu^2,$$

wo $k_{1,1}$ der *kleinste aller überhaupt vorkommenden* ausgezeich-

neten Werthe ist. Diesen Werthen $k_{\mu,\mu}$ entsprechen demnach bei der gleichförmig gespannten homogenen Membran von der Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks (von der Höhe $3r$) *die harmonischen Obertöne des Grundtones; letzterer stimmt überein mit dem Grundtone eines Quadrates, dessen Diagonale gleich der Höhe $3r$ des gleichseitigen Dreiecks ist,* woraus hervorgeht, dass sich der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks zu jenem des Quadrates von gleichem Grundton wie $2:\sqrt{3}$ verhält. — Die Knotenlinien sind im vorliegenden Falle $\mu = \nu$ *Parallele zu den Seiten des Dreiecks,* welche das letztere in μ^2 congruente gleichseitige Dreiecke theilen.

Im *allgemeinen* Falle, wo $\mu \gtrless \nu$ ist, führt die Frage nach der Multiplicität von k^2 auf das zahlentheoretische Problem, *sämmtliche Darstellungen einer gegebenen ganzen Zahl m durch die quadratische Form $\mu^2 + \mu\nu + \nu^2$ oder $\frac{1}{4}(\mu'^2 + 3\nu'^2)$ zu finden**). — Man würde zu diesem Zwecke die Zahl m in ihre complexen Primfactoren von der Form $\alpha + \beta\varrho$ und $\alpha + \beta\varrho^2$, wo ϱ eine dritte Einheitswurzel bedeutet, zu zerlegen und dann ähnlich zu verfahren haben, wie bei der Darstellung durch die Summe zweier einfacher Quadrate, wobei die complexen Primfactoren $\alpha + \beta i$ und $\alpha - \beta i$ zu ermitteln waren (vergl. S. 80, 81). — Die ausgezeichneten Werthe k^2 ordnen sich in ebenso viele Reihen, deren Glieder aus dem Anfangsglied $\left(\frac{2\pi}{3r}\right)^2 \frac{m}{3}$ durch Multiplication mit 2^2, 3^2, $4^2 \cdots$ hervorgehen, und von denen jede einer Reihe *harmonischer* Töne entspricht, als es ganze Zahlen m giebt, welche sich in der Form

$$\mu^2 + \mu\nu + \nu^2$$

darstellen lassen und nicht durch eine Quadratzahl theilbar sind. Dazu kommt noch eine Reihe, für welche $\mu^2 + \mu\nu + \nu^2$ *selbst eine Quadratzahl* ist, und deren Anfangsglied $\frac{1}{3}\left(\frac{2\pi}{3r}\right)^2$

---

*) Näheres über dieses zahlentheoretische Problem findet man z. B. in *Bachmann's* „Lehre von der Kreistheilung" (Leipzig 1874), S. 138—144 und 185—199.

kein zulässiger ausgezeichneter Werth ist, weil dasselbe für $\mu = 0$, $\nu = \pm 1$ erhalten wird. Die Töne dieser Reihe sind identisch mit den harmonischen Obertönen des tiefsten Tones eines Quadrates, dessen *Diagonale* das $\frac{3}{2}$-fache von der Seite a des Dreiecks ist; hierher gehört z. B. die Zahl $m = 5^2 + 5 \cdot 3 + 3^2 = 7^2$. Andere bemerkenswerthe Fälle sind derjenige, wo $m = \mu^2 + \mu\nu + \nu^2$ die *Summe zweier Quadratzahlen* ist, und wo die entsprechenden Töne übereinstimmen mit den harmonischen Obertönen des Grundtones des Quadrates von der Seite $\frac{3}{4}a$, ferner der, wo $\frac{m}{3}$ die Summe zweier Quadratzahlen ist, und wo dann die Töne zugleich dem Quadrate von der *Seite* $\frac{3}{2}r$ (welches *Lamé* nicht ganz zutreffend das dem gleichseitigen Dreiecke eingeschriebene nennt) als Grundton und dessen harmonische Obertöne zukommen; letzterer Fall liegt z. B. vor für $\mu = 5$, $\nu = 2$, sowie für $\mu = 10$, $\nu = 7$. Endlich ist noch der (die vorgenannten nicht ausschliessende) Fall zu erwähnen, dass $\mu \equiv \nu (\equiv \lambda) \bmod. 3$ ist, welche Congruenz zur Folge hat, dass die Functionen u_1 und u_2 sich bei cyklischer Vertauschung von P, P', P'' nicht ändern, also das System der zu jeder von ihnen gehörigen Knotenlinien *in Bezug auf alle drei Höhenlinien symmetrisch ist.*

Die Figuren 14 bis 17 stellen die Knotenlinien für einige einfache Fälle dar; die entsprechenden Werthe von μ, ν, λ, die Normalfunction, welcher die Knotenlinien zukommen, und die Schwingungszahlen der Töne bezogen auf diejenige (N_0) des Grundtones sind bei jeder Figur angegeben. Für den Fall $\mu = 1$, $\nu = 2$ habe ich die Entfernung der Schnittpunkte der zu u_2 gehörigen Knotenlinie mit den Seiten von der Spitze des Dreiecks zu $\frac{1{,}715}{\sqrt{3}} \cdot 2r$ berechnet, wonach diese Schnittpunkte nahe zusammenfallen mit denjenigen des um die Spitze beschriebenen, durch den Schwerpunkt des Dreiecks gehenden Kreises, der sich daher mit der Knotenlinie überhaupt fast decken wird. Für diesen, dem zweittiefsten Tone entsprechen-

den Fall habe ich auch in Figur 14 a bis d den Uebergang von der Höhenlinie $u_1 = 0$ zur Curve $u_2 = 0$ angedeutet.

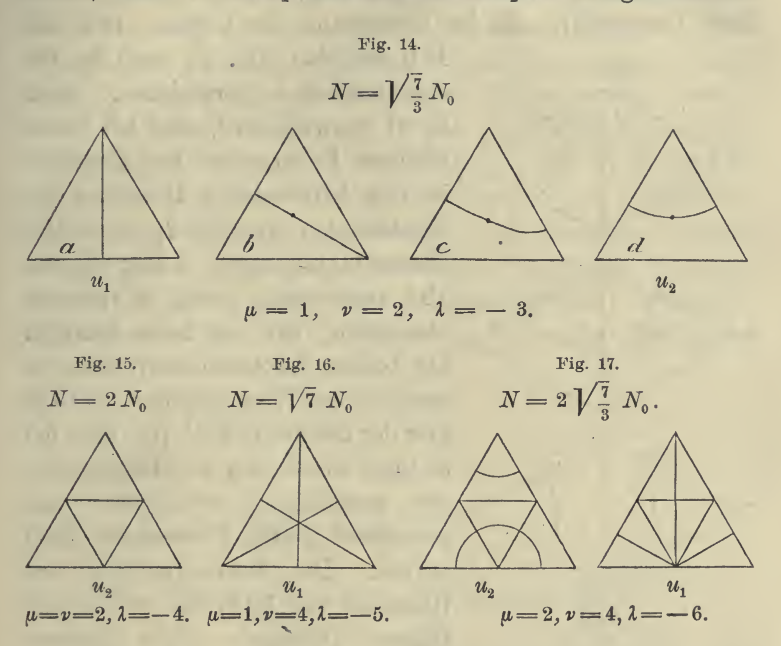


Fig. 14.

$N = \sqrt{\frac{7}{3}}\, N_0$

$\mu = 1, \quad \nu = 2, \quad \lambda = -3.$

Fig. 15. $N = 2 N_0$ — $\mu = \nu = 2, \lambda = -4.$

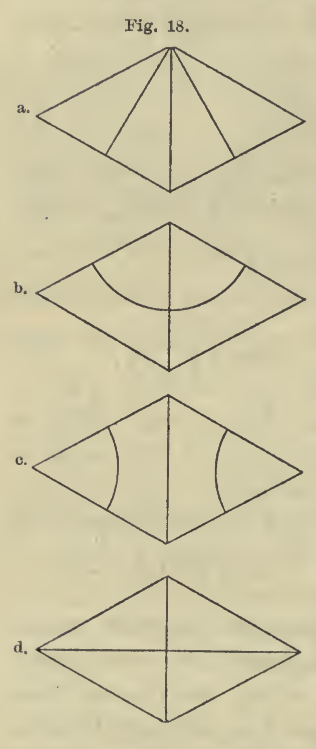
Fig. 16. $N = \sqrt{7}\, N_0$ — $\mu = 1, \nu = 4, \lambda = -5.$

Fig. 17. $N = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\, N_0.$ — $\mu = 2, \nu = 4, \lambda = -6.$

Wie schon zu Anfang dieses Paragraphen erörtert wurde, kann man aus den bekannten Normalfunctionen eines geradlinig begrenzten Bereiches sogleich durch analytische Fortsetzung *einen Theil* der Normalfunctionen solcher Bereiche ableiten, welche aus dem gegebenen durch symmetrische Wiederholung erhalten werden. So liefern z. B. u_1 und u_2, über die Seiten des gleichseitigen Dreiecks hinaus *antisymmetrisch* fortgesetzt, Normalfunctionen des *Rhombus vom Winkel* 120^0 und des *regelmässigen Sechsecks* bei der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$, und u_1 ergiebt auch solche des *gleichschenkligen Dreiecks vom Winkel* 120^0 bei derselben Grenzbedingung; specielle Knotenliniensysteme dieser Bereiche sind demnach auch in den vorstehenden Figuren enthalten bezw. durch symmetrische Wiederholung derselben zu construiren. Nebenstehend sind verschiedene Knotenlinien des Rhombus von 120^0, welche alle in den beiden letzten Figuren

für das gleichseitige Dreieck enthalten sind und zu einem und demselben Werthe $k^{2'}$ gehören, noch einmal besonders dargestellt. Es ist interessant, die Figuren 18a und 18b mit den Fig. 2g und 3g für das Quadrat zu vergleichen. Denn es ist unzweifelhaft, dass bei einem stetigen Uebergange des Quadrats in den betrachteten Rhombus die Knotenlinien in Fig. 2g und 18a einerseits, diejenigen in Fig. 3g und 18b andererseits stetig in einander übergehen, und da beim Quadrat die beiden Knotenliniensysteme zu *verschiedenen* Tönen gehören, so liegt hier der besondere Fall vor, dass bei stetiger Aenderung der Begrenzung *zwei ursprünglich verschiedene ausgezeichnete Werthe k^2 einander gleich werden.* Die Normalfunction des Rhombus von 120°, bei welcher die längere Diagonale allein Knotenlinie ist (bei der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$), ist unter den Functionen u_1, u_2, u_1', u_2' nicht enthalten; jedenfalls wird sie aber zu einem von $k_{1,1}^2$, dem kleinsten ausgezeichneten Werthe für das gleichseitige Dreieck, welchem beim Rhombus die kurze Diagonale als Knotenlinie entspricht, *verschiedenen* Werthe k^2 gehören, *so dass beim Uebergange des Quadrats in den Rhombus umgekehrt die beiden ursprünglich zusammenfallenden Wurzeln k^2, zu welchen die auf der einen und auf der andern Diagonale verschwindenden Normalfunctionen gehören, sich trennen.* —

Fig. 18.



Es wären nun noch die Normalfunctionen der oben erwähnten *sphärischen Dreiecke*, welche nach ihren Winkeln bezw. durch $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right)$ bezeichnet werden mögen, zu besprechen; hierüber sind jedoch

noch keine besonderen Untersuchungen vorhanden, weshalb wir uns auf die Angabe derjenigen Normalfunctionen beschränken wollen, welche bei der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ im Innern jener Dreiecke *nirgends verschwinden*, also den *Grundtönen* von Luftschichten mit offenem Rande von der Gestalt jener Dreiecke entsprechen. Diese Normalfunctionen sind *Kugelflächenfunctionen* bezw. vom 6ten, 9ten, 15ten Grade, welche auf 6, 9, 15 grössten Kreisen, die bezw. in den Symmetrieebenen des Tetraëders, Octaëders und Ikosaëders liegen, verschwinden. Man erhält dieselben (abgesehen von constanten Factoren), indem man in nachstehenden Ausdrücken die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z der Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 = \text{Const.}$ unterwirft:

I. $(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)$,

II. $xyz(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)z^2 - x^2)$,

III.*) $$\prod_{n=0}^{n=4} \left(x \sin \frac{2n\pi}{5} + y \cos \frac{2n\pi}{5}\right) \cdot \left(2z \cos \frac{2\pi}{5} + x \cos \frac{2n\pi}{5} - y \sin \frac{2n\pi}{5}\right) \cdot \left(2z \cos \frac{\pi}{5} - x \cos \frac{2n\pi}{5} + y \sin \frac{2n\pi}{5}\right).$$

Denn einerseits sieht man sofort, dass diese Ausdrücke bezw. auf den Symmetrieebenen eines Tetraëders, Oktaëders und Ikosaëders verschwinden und sonst nirgends, andererseits lässt sich leicht durch folgende Betrachtung (K)**), die wir nur für das Ikosaëder ausführen, zeigen, dass sie *räumliche Kugelfunctionen* sind. Bekanntlich***) sind bei den Ikosaëderdrehungen ausser $x^2 + y^2 + z^2$ nur je eine ganze rationale Function 6ten Grades (B), 10ten Grades (C)

---

*) Vergl. z. B. *E. Goursat:* Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier. Ann. de l'École Normale supérieure (3) IV; 1887, p. 14.

) Angedeutet schon in einer Anmerkung zu dem Aufsatze über Lamé'sche Functionen, Math. Ann. **18, p. 239.

***) *F. Klein*, Vorlesungen über das Ikosaëder, Leipzig 1884. p. 219.

und 15[ten] Grades (D, bis auf einen Factor übereinstimmend mit III) invariant. Aus diesen Functionen ist nun der zweite Differentialparameter von D oder vom Ausdrucke (III), weil er vom 13[ten] Grade ist, nicht zusammensetzbar; da derselbe aber dennoch, wie D selbst, bei den Ikosaëderdrehungen invariant sein muss, so ist er nothwendig $= 0$. Folglich ist (III) eine räumliche Kugelfunction. Durch eine entsprechende Schlussweise würde dies nun auch für die Functionen (II) und (I) zu beweisen sein. — Für die aus den letzteren durch Einführung der Relation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ abgeleiteten Kugelflächenfunctionen finde ich durch eine einfache Rechnung folgende Ausdrücke:

$$(\mathrm{I}')\quad P_{6,2}(\cos\vartheta)\cos 2\varphi - \frac{1}{33}P_{6,6}(\cos\vartheta)\cos 6\varphi \text{ für } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right),$$

$$(\mathrm{II}')\quad P_{9,4}(\cos\vartheta)\sin 4\varphi - \frac{1}{34}P_{9,8}(\cos\vartheta)\sin 8\varphi \text{ für } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right),$$

wobei φ von einer dem gewählten Tetraëder nicht zukommenden Symmetrieebene des Octaëders an gerechnet und $P_{n,m}$ die bekanntermassen durch nachstehende Summe definirte „zugeordnete Kugelfunction" ist:

$$P_{n,m}(\cos\vartheta) = \sin^m\vartheta\left\{(\cos\vartheta)^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}(\cos\vartheta)^{n-m-2}\right.$$
$$\left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}(\cos\vartheta)^{n-m-4} - \cdots\right\}.$$

Die entsprechenden Werthe von k^2 sind nach § 7b, wenn der Radius der Kugel $= 1$ ist, $6.7 = 42$ und $9.10 = 90$; ist der Radius $= r$, so tritt der Factor $\frac{1}{r^2}$ hinzu.

Anmerkung 1. Hiermit sind die Bereiche, welche zu der im Anfang des letzten Paragraphen definirten Classe gehören, erschöpft, und damit überhaupt alle Fälle, in welchen man die Normalfunctionen bisher aufgefunden hat, wenn man von einem Versuche *Mathieu's* absieht, die letzteren für

ebene Bereiche zu bestimmen, die *von zwei excentrischen Kreisen* oder *von zwei confocalen Cassini'schen Curven* begrenzt werden*). *Mathieu* führt auch zur Behandlung dieser Probleme diejenigen krummlinigen Coordinaten ein, welche die *conforme Abbildung* der genannten Bereiche *auf ein Rechteck* vermitteln, und von welchen also die eine auf den Begrenzungscurven *constant* ist; dann lässt sich aber die transformirte partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ *nicht durch Producte* aus Functionen von je einer Variabeln integriren, wie aus dem am Schlusse des § 8 Gesagten hervorgeht**). *Mathieu* setzt nun für die Normalfunctionen u Reihen an, welche nach Potenzen der einen, auf den Begrenzungscurven constanten Variabeln fortschreiten, und entwickelt auch den Factor von $k^2 u$ in eine solche Potenzreihe; für die Coefficienten in dieser Reihe, welche Functionen der anderen Variabeln allein sind, ergiebt sich dann ein System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, durch welche diese Functionen alle auf *eine* von ihnen zurückgeführt werden. Die Bestimmung der letzteren führt *Mathieu* dadurch aus, dass er von der bekannten Lösung für einen Kreisring ausgehend eine nach Potenzen des Abstandes der Kreismittelpunkte fortschreitende Reihe hinzufügt. Die Constanten werden so bestimmt, dass die erwähnten Functionen, weil es sich um Ringgebiete handelt, periodisch sind, und dass die Grenzbedingung ($\bar{u} = 0$ oder auch die allgemeine

*) *Mathieu:* Mémoire sur le mouvement de la température dans le corps renfermé entre deux cylindres circulaires excentriques et dans des cylindres lemniscatiques. Liouville's Journal (2) XIV. p. 65—103, 1869.

**) Hiermit ist noch nicht die Möglichkeit ausgeschlossen, dass die Nulllinien der Normalfunctionen solche Curven sind, auf denen eine der erwähnten Variabeln constant ist; denn die Normalfunctionen könnten ja *nach Abtrennung einer Function beider Coordinaten*, welche im Gebiete nicht verschwindet, in Producte aus zwei von nur je einer Coordinate abhängigen Factoren übergehen. Nach einer Abhandlung *Wangerin's* (Berliner Monatsberichte 1878, p. 152—166) über die Integration der Potentialgleichung für Rotationskörper, deren Meridianschnitte *cyklische Curven* sind, scheint das in der That der Fall sein zu müssen, während *Mathieu* das Gegentheil behauptet.

$h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$) für die innere und äussere geschlossene Grenzcurve erfüllt ist.

Diese Untersuchungen *Mathieu's* sind indessen zu umständlich, als dass hier näher auf sie eingegangen werden könnte; auch sind sie nicht vollständig durchgeführt und würden wohl nur in solchen Fällen zu brauchbaren Resultaten führen, wo die Abweichung der excentrischen Kreise oder der Cassini'schen Ovale von concentrischen Kreisen gering ist. Bemerkt sei noch, dass als Grenzfall der Normalfunctionen des von excentrischen Kreisen begrenzten Ringes diejenigen erhalten werden, welche für eine kreisförmige Membran, von der ein beliebiger innerer Punkt festgehalten wird, die Eigenschwingungen liefern. —

Anmerkung 2. Im gewöhnlichen Sprachgebrauch ist wohl von den *Eigentönen* von *musikalischen Blasinstrumenten* oder *Resonatoren* die Rede. Es könnte also scheinen, als ob diejenigen Arbeiten, welche sich mit der Theorie dieser sogenannten Eigentöne beschäftigen, also z. B. die berühmte *v. Helmholtz*'sche Abhandlung über *Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden**), die weiteren Untersuchungen über Resonatoren von *Rayleigh***), ebenfalls an dieser Stelle, unter den „lösbaren Fällen", zu besprechen wären. Allein dies würde nur dann der Fall sein, wenn man an denjenigen Flächen, wo die betreffenden Räume mit dem äusseren Luftraume in Verbindung stehen, die Bedingung $\bar{u} = 0$, d. i. verschwindende Dilatation, annehmen oder, was dasselbe ist, die Trägheit der äusseren Luft vernachlässigen könnte, wie es bei der alten Theorie der offenen Pfeifen geschah und auch stillschweigend vorausgesetzt wurde, wenn in den vorhergehenden Betrachtungen von den Schwingungen von Luftplatten mit offenem Rande die Rede war. In Wirklichkeit sind

---

*) Crelle's Journal 57, 1—72, 1860; v. Helmholtz' wissenschaftl. Abhandlungen, 1882, 1. Bd.

**) Theorie des Schalles Cap. XVI; „über Resonanz", Phil. Transactions 1871.

aber die Blasinstrumente und Resonatoren *nicht als geschlossene Räume zu betrachten*, da die Luft in ihnen zugleich mit der im unendlichen äusseren Luftraume schwingt; sie sind daher fähig, *jeden beliebigen Ton* zu geben, d. h. die ausgezeichneten Werthe k^2 bilden für sie eine *stetige* Mannigfaltigkeit. Nur die *Intensität* ist bei einer bestimmten Erregungsart verschieden je nach der Tonhöhe, und man könnte wohl geradezu sagen (K.):

Bei Blasinstrumenten uud Resonatoren handelt es sich um Räume, für welche jedes k^2 ein ausgezeichneter Werth ist, aber gewisse discrete Werthe von k^2 durch Nebenumstände, welche ausserhalb des Bereiches unserer Betrachtung liegen, z. B. durch relativ grosse Intensität der Resonanz bei bestimmter Erregungsart, besonders hervortreten.

In der That bestimmt auch *von Helmholtz* bei den offenen Pfeifen unter gewissen Annahmen über die Schwingungsform (oder Erregungsart, z. B. durch von aussen auf die Oeffnung fallende ebene Wellen) diejenigen Werthe von k^2, für welche die Amplitude *Maxima* erreicht, und bei den Resonatoren wird ebenso verfahren, nur mit dem Unterschiede, dass sich bei ihnen die bisherigen Berechnungen nur auf den *tiefsten* Ton, für welchen ein Maximum eintritt, beziehen. Uebrigens werden bei diesen Untersuchungen nicht nur *stehende* Wellen, sondern im Hinblick auf die in der Natur vorkommenden Verhältnisse *fortschreitende* betrachtet, was eben deshalb möglich ist, weil für unendlich ausgedehnte Räume jeder Werth k^2 ein vielfacher ausgezeichneter Werth ist. — Mit den oben bezeichneten Umständen (Mitschwingen der äusseren Luft) hängt es auch zusammen, dass die Gestalt und Grösse der Oeffnungen von so wesentlichem Einflusse auf die scheinbaren Eigentöne der Blasinstrumente und Resonatoren ist.

C. Mathematische Begründung der allgemeinen Theorie der ausgezeichneten Lösungen.

§ 10. Berechnung des kleinsten ausgezeichneten Werthes k^2 bei der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ für beliebige ebene Bereiche nach H. A. Schwarz.

Im Vorhergehenden haben wir gesehen, dass die Auffindung der *sämmtlichen* ausgezeichneten Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ nur für eine Anzahl specieller ebener, räumlicher und sphärischer Bereiche bisher gelungen ist. Dagegen hat nun *H. A. Schwarz* im zweiten Theile seiner Abhandlung „über ein die Flächen kleinsten Flächeninhaltes betreffendes Problem der Variationsrechnung"*) ein Verfahren angegeben, welches gestattet, *für einen beliebigen ebenen Bereich bei der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ diejenige ausgezeichnete Lösung der partiellen Differentialgleichung*

$$\Delta u + k^2 f u = 0, \tag{47}$$

welche innerhalb des Bereiches nirgends verschwindet, also dem kleinsten ausgezeichneten Werthe k^2 entspricht, zu finden, oder doch ihre Existenz sicher zu stellen. In der Differentialgleichung (47) bezeichnet f *eine beliebige Function von x, y,* welche nur der Bedingung unterworfen ist, im ganzen gegebenen Bereiche *positiv* zu sein; daher liefert das *Schwarz*'sche Verfahren auch den kleinsten ausgezeichneten Werth k^2 und die entsprechende Lösung der in krummlinige Coordinaten transformirten Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ (also die erste *Normalfunction* gemäss der Anmerkung S. 101) *für irgend welche Bereiche auf krummen Flächen.* In der That handelte es sich bei der speciellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{8}{(1 + x^2 + y^2)^2}\, u = 0,$$

durch welche *Schwarz* auf die in Rede stehende allgemeine Untersuchung geführt wurde, um einen Fall der letzteren Art,

---

*) Festschrift zum Jubelgeburtstage des Herrn Weierstrass, Acta soc. scient. Fennicae, T. XV. Helsingfors 1885. Gesammelte math. Abhandlungen, Berlin 1890, 1. Bd. p. 241—262.

nämlich um Gebiete auf der *Kugelfläche*, wie die besondere Form der Function f (welche das reciproke Flächen-Vergrösserungsverhältniss bei der stereographischen Projection darstellt; vergl. S. 101) sofort erkennen lässt. Ein sphärisches Flächenstück, für welches vorstehende Differentialgleichung eine im Innern nirgends das Vorzeichen wechselnde ausgezeichnete Lösung besitzt, ist insbesondere die *halbe Kugelfläche;* denn die Vergleichung mit Gleichung (31′) zeigt, dass hier k^2 den speciellen Werth 2 besitzt, welcher den *vollständigen Kugelflächenfunctionen erster Ordnung* (cf. S. 106) zukommt, und die letzteren verschwinden nur auf einem grössten Kreise.

Die physikalischen Probleme, für welche das Verfahren von *H. A. Schwarz* die Lösung liefert, sind offenbar in erster Linie: *die Bestimmung des Grundtones und der zugehörigen Schwingungsform für eine beliebig gestaltete (ebene) Membran von beliebig, jedoch stetig variabeler (überall endlicher und positiver) Dichte, aber constanter Spannung*, und *für eine am Rande offene dünne Luftschicht von constanter Dicke, welche die Gestalt eines beliebigen Stückes irgend einer krummen Fläche besitzt.* — Ueber die Begrenzung wird nur vorausgesetzt, dass sie *aus einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Linien besteht und ganz im Endlichen liegt.*

Da hier der Inhalt jener wichtigen Abhandlung von *H. A. Schwarz* doch nur auszugsweise wiedergegeben werden kann, so ist es wohl zweckmässiger, die Bezeichnungen des Letzteren unverändert beizubehalten und dementsprechend im Folgenden $p(x, y)$ statt $k^2 f(x, y)$ und w statt u zu schreiben, so dass die zu betrachtende Differentialgleichung heisst:

$$\Delta w + p(x, y) w = 0.$$

Die Methode von *Schwarz* knüpft an die Theorie des *logarithmischen Potentials* an und *beruht auf der Möglichkeit, die Differentialgleichung* $\Delta w + f_1(x, y) = 0$ *für den gegebenen Bereich in der XY-Ebene zu integriren*, und zwar so, dass die Randwerthe von w gleich *Null* sind. Diese Lösung w wird durch das über den ganzen Bereich erstreckte Doppelintegral

$$(48) \qquad w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\int f_1(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta$$

geliefert, wenn G die *Green'sche Function* des Bereiches bezeichnet, d. h. eine Lösung der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$, welche an der Stelle $x = \xi$, $y = \eta$ logarithmisch unendlich gross (wie $-\log[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]$) wird, sonst im ganzen Gebiete endlich und stetig ist und längs der Begrenzung verschwindet. — Mittelst der Formel (48) kann man nun eine unendliche Reihe von Functionen w_1, w_2, ... w_n herstellen, welche den Differentialgleichungen

$$(49)\qquad \begin{gathered} \Delta w_1 + p w_0 = 0, \quad \Delta w_2 + p w_1 = 0, \ldots \\ \Delta w_n + p w_{n-1} = 0 \ldots \end{gathered}$$

genügen und am Rande sämmtlich *verschwinden*. Für w_0 wird eine durch ihre Randwerthe bestimmte Lösung der Potentialgleichung $\Delta w_0 = 0$ gesetzt, und zwar werden die Randwerthe für den jetzigen Zweck speciell constant $= +1$ gewählt, was bekanntlich zur Folge hat, dass w_0 selbst im ganzen Gebiete den constanten Werth $+1$ besitzt. Die Functionen $w_0, w_1, \ldots w_n \ldots$ sind dann alle im ganzen Gebiete *positiv*, wie aus der Formel (48) mit Rücksicht auf die Eigenschaften von G folgt.

Nun bildet *Schwarz* die über den ganzen Bereich erstreckten Integrale

$$(50)\qquad \begin{gathered} W_0 = \iint p w_0 d\xi d\eta = \iint p\, d\xi d\eta, \quad W_1 = \iint p w_1 d\xi d\eta, \\ W_2 = \iint p w_2 d\xi d\eta, \ldots \quad W_n = \iint p w_n d\xi d\eta \ldots \end{gathered}$$

und beweist, dass die Quotienten

$$(51)\qquad c_1 = \frac{W_1}{W_0}, \quad c_2 = \frac{W_2}{W_1}, \ldots \quad c_n = \frac{W_n}{W_{n-1}} \ldots$$

eine unendliche Reihe beständig zunehmender (nur von dem gegebenen Bereiche und der Function p abhängender) Constanten bilden, welche sich *einer bestimmten endlichen obern Grenze* $c = \lim c_n$ nähern. Werden die Functionen $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \ldots \mathfrak{w}_n \ldots$ durch die Relation

$$(52)\qquad \mathfrak{w}_n = c^{-n} w_n$$

definirt, so genügt $\mathfrak{w}_n$ der Differentialgleichung

$$\Delta \mathfrak{w}_n + \frac{p}{c}\, \mathfrak{w}_{n-1} = 0.$$

Es wird nun durch Betrachtung des Integrals

$$\iint p^2(\mathfrak{w}_n - \mathfrak{w}_{n+k})^2 d\xi d\eta$$

und des Grenzwerthes von

$$\mathfrak{W}_n = c^{-n} W_n = \frac{c_1}{c} \cdots \frac{c_n}{c} W_0$$

gezeigt, dass der absolute Betrag der Differenz

$$\mathfrak{w}_n - \mathfrak{w}_{n+k}$$

bei beliebigem k unendlich klein wird, wenn n unendlich wächst, dass sich also die Functionen $\mathfrak{w}_n$ für $\lim n = \infty$ einer *bestimmten endlichen Grenzfunction* $\mathfrak{w}$ nähern. Da $\lim \mathfrak{w}_{n-1} = \lim \mathfrak{w}_n = \mathfrak{w}$ ist, so genügt diese Grenzfunction im ganzen Bereiche der Differentialgleichung

$$\Delta \mathfrak{w} + \frac{1}{c} p \mathfrak{w} = 0;$$

ausserdem verschwindet sie längs der ganzen Begrenzung und ist im Innern überall > 0, da dies von allen Functionen w_n und $\mathfrak{w}_n$ gilt.

Demnach ist die Function $\mathfrak{w} = \lim (w_n \cdot c^{-n})$ *die innerhalb des Bereiches nirgends das Vorzeichen wechselnde ausgezeichnete Lösung der Differentialgleichung*

$$\Delta w + \frac{1}{c} p(x, y) w = 0 \quad \textit{oder} \quad \Delta u + k^2 f u = 0$$

für den gegebenen Bereich, und $k_1{}^2 = \frac{k^2}{c}$ *ist der zugehörige ausgezeichnete Werth von* k^2.

Das *Schwarz*'sche Verfahren lässt sich, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, folgendermassen beschreiben: Man bestimmt zunächst das *logarithmische Potential* einer beliebigen, z. B. gleichförmigen Massenbelegung des gegebenen Bereiches und ändert die Dichte dieser Belegung successive in der Weise ab, dass schliesslich der Werth des Potentials, multiplicirt mit einer gegebenen Ortsfunction p, an jeder Stelle demjenigen der Dichte gleich wird; durch Hinzufügung eines constanten Factors zu p kann man dann erreichen, dass der Werth des in jener Weise gewonnenen Potentials auf der Begrenzung verschwindet.

Durch das angedeutete Verfahren zur Berechnung des kleinsten ausgezeichneten Werthes k^2 und der zugehörigen ausgezeichneten Lösung ist natürlich auch der allgemeine *Existenzbeweis* für letztere erbracht, welcher bis dahin fehlte und auch jetzt für die höheren ausgezeichneten Lösungen noch nicht gelungen ist. Dagegen würde die wirkliche Herstellung der Lösung nach dem *Schwarz*'schen Verfahren in den meisten Fällen wohl sehr schwierig und umständlich sein, da sie die Bestimmung einer unendlichen Reihe von Functionen, die durch complicirte Doppelintegrale gegeben sind, erfordert.

Schwarz zeigt auch, dass

$$\frac{1}{c} = \frac{\iint \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy}{\iint p\mathfrak{w}^2\,dx\,dy}$$

der kleinste Werth ist, welchen der Quotient der über den gegebenen Bereich erstreckten Doppelintegrale

$$\iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy, \qquad \iint p u^2\,dx\,dy$$

annehmen kann, falls u irgend eine stetige, eindeutige, längs der ganzen Begrenzung verschwindende Function von x, y ist, für welche das erste Integral überhaupt eine bestimmte Bedeutung hat. Dieser Satz stimmt mit dem in II, § 4 S. 60 Gesagten überein; denn $\frac{1}{c}$ ist ja der dort mit λ_1 bezeichnete kleinste ausgezeichnete Werth, falls $B = 0$, $A' = A'' = 1$ und $A''' = p$ gesetzt wird.

Der Ausdehnung des *Schwarz*'schen Verfahrens zur Bestimmung der ersten Normalfunction*) auf *räumliche* Bereiche scheinen keine Bedenken entgegenzustehen, weil die Grundlagen des Verfahrens, vor Allem die Kenntniss der *Green'schen Function*, auch dort vorhanden sind; denn die Bestimmung einer Potentialfunction für einen von beliebigen, analytischen

---

*) Die Ausdrücke „Normalfunction" und „ausgezeichnete Lösung" decken sich hier im Wesentlichen, weil der *kleinste* ausgezeichnete Werth k^2 stets ein *einfacher* ist.

Flächen umschlossenen räumlichen Bereich aus ihren Oberflächenwerthen und damit insbesondere diejenige der Green-schen Function G kann gegenwärtig als erledigt gelten (vgl. den Excurs über Potentialtheorie im IV. Theile). Die Entwickelungen und Convergenzbeweise von *H. A. Schwarz* würden für den Fall von drei Dimensionen unverändert bleiben. —

§ 11. **Abhängigkeit der ausgezeichneten Werthe k^2 von den Dimensionen und von der Gestalt des Bereiches; Abschätzung ihrer Grösse.**

Wir werden uns in diesem Paragraphen noch mit einigen Betrachtungen über die ausgezeichneten Werthe k^2 zu beschäftigen haben, welche auch in solchen allgemeinen Fällen anwendbar sind, wo man die ausgezeichneten Lösungen selbst nicht kennt.

Wenn es sich um die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0$$

handelt, so lässt sich aus ihrer Form selbst, welche offenbar unverändert bleibt, wenn man x, y, z mit einem constanten Factor C multiplicirt und k durch denselben Factor dividirt, der Satz erschliessen:

Für zwei Bereiche, welche geometrisch ähnlich sind, verhalten sich bei derselben Grenzbedingung ($\bar{u} = 0$ *oder* $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$) *die correspondirenden ausgezeichneten Werthe k umgekehrt wie die linearen Dimensionen.*

Beispiele für diesen Satz findet man unter den besprochenen lösbaren Fällen in Menge; es sei nur an den Kreis erinnert, wo das *Product* kr als Argument der Bessel'schen Functionen auftrat, also die aus der Grenzbedingung folgenden Werthe k dem Radius $\bar{r}$ umgekehrt proportional waren. Soll der Satz für die allgemeine Grenzbedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ gültig bleiben, so muss man h *in demselben Verhältniss verkleinern*, in welchem man die linearen Dimensionen vergrössert; und hätte $k^2 u$ in

der Differentialgleichung noch den Factor $f(x, y, z)$, so müsste auch diese Function f (also die Dichtevertheilung bei den Schwingungsproblemen) in der Weise geändert werden, dass sie in correspondirenden Punkten des ursprünglichen und des ihm ähnlichen Bereiches gleiche Werthe besässe. Bei einer Aenderung des Bereiches durch eine *beliebige* Art der Abbildung müsste überhaupt, damit die ausgezeichneten Werthe k^2 ungeändert blieben, an Stelle der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ eine bestimmte andere von der allgemeinen Form (2) bezw. (3) mit $a_0 = 0$ treten. Näher hierauf einzugehen, hätte aber an dieser Stelle keinen Zweck, da hier die Differentialgleichung fernerhin als *gegeben* gelten soll. Uebrigens wurde die erwähnte Aenderung der Differentialgleichung für den Fall der *conformen* Abbildung bereits in I, § 4 ausführlich besprochen.

Dass der *kleinste* ausgezeichnete Werth k_1 *bei beliebiger Verkleinerung des Bereiches wächst*, folgt aus den Untersuchungen von *Schwarz* in No. 21 der schon citirten Abhandlung; denn dort wird (durch Betrachtung des Quotienten $\int\int\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} dx dy : \int\int p u^2 dx dy$) bewiesen, dass die im vorigen Paragraphen erklärte Grösse $\frac{1}{c}$, also k_1^2, für einen Bereich T', welcher *einen Theil* eines anderen T bildet, *grösser* ist, als für T. Ferner wird dort gezeigt, *dass bei stetiger Verkleinerung des Bereiches der Werth von* $\frac{1}{c}$ *oder von* k_1^2 *ebenfalls stetig wächst.*

Ueber die Aenderung der ausgezeichneten Werthe in Folge einer nicht nothwendig mit einer Verkleinerung des Bereiches verbundenen *stetigen Abänderung der Begrenzung* scheint bisher nur eine Untersuchung von *Rayleigh* vorzuliegen, welche sich auf den kleinsten ausgezeichneten Werth von k^2 in der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ für den *Kreis* bei der Randbedingung $\bar{u} = 0$ bezieht*). Die betreffenden Resultate sind kurz folgende.

---

*) Theorie des Schalles §§ 209—211.

Der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügt ganz allgemein in der Ebene die unendliche Reihe

$$\sum_0^\infty J_n(kr)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Ist nun die Begrenzung ein *Kreis* vom Radius a, so wird der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ bekanntlich dadurch genügt, dass man alle Coefficienten ausser A_n und B_n gleich Null setzt und k als Wurzel der transcendenten Gleichung $J_n(ka) = 0$ bestimmt. Wenn nun die Begrenzungscurve *wenig von jenem Kreise abweicht*, also etwa durch die Gleichung

$$\bar{r} = a + \delta r$$

dargestellt wird, worin δr eine Function von φ ist, so nimmt *Rayleigh* (auf Grund des S. 95—96 ausgesprochenen Stetigkeitsprincips) an, dass die übrigen Coefficienten obiger Reihe gegen A_n und B_n *sehr klein* sind. Er beschränkt sich zunächst auf die *nahezu symmetrischen* Schwingungen, d. h. diejenigen, bei welchen im Fall kreisförmiger Begrenzung alle Knotenlinien concentrische Kreise sind, und findet dafür die Randbedingung in der Form

$$A_0\{J_0(ka) + k\delta r J_0'(ka)\} + J_1(ka)(A_1 \cos\varphi + B_1 \sin\varphi) + \cdots$$
$$+ J_n(ka)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \cdots = 0.$$

Integrirt man die linke Seite nach φ von 0 bis 2π, so folgt

$$2\pi J_0(ka) + J_0'(ka)\int_0^{2\pi} k\delta r d\varphi = 0$$

oder

$$J_0\Big(ka + k\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta r d\varphi\Big) = 0,$$

woraus folgt, dass die den nahezu symmetrischen Schwingungen entsprechenden ausgezeichneten Werthe *dieselben* sind, wie diejenigen eines genau kreisförmigen Bereiches, dessen Radius

$$\bar{r} = a + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta r d\varphi,$$

also gleich dem *mittleren* Radius des gegebenen Bereiches, und dessen *Flächeninhalt* demnach *gleich* dem des letzteren ist. *Rayleigh* zeigt nun ferner, indem er in der Annäherung einen Schritt weiter geht, dass der kleinste ausgezeichnete Werth k_1^2 für einen *nahezu* kreisförmigen Bereich *grösser* ist als für den *genau* kreisförmigen *von gleichem Flächeninhalt.* Dieses Resultat in Verbindung mit der Thatsache, dass von allen Bereichen, für welche man den Werth von k_1 kennt, bei gleichem Flächeninhalt der Kreis das kleinste k_1 hat, veranlasst *Rayleigh* zu der Behauptung, *dass überhaupt unter allen Bereichen von gleichem Flächeninhalt dem kreisförmigen der absolut kleinste Werth von k_1 zukomme*, oder, wie er es ausspricht, *dass unter allen Membranen von gleichem Flächeninhalt die kreisförmige den tiefsten Grundton besitze.*

Die Schwingungszahlen des Grundtones einer Anzahl verschieden gestalteter Membranen von gleichem Flächeninhalt, bezogen auf den Grundton der kreisförmigen, sind nachstehend zusammengestellt:

Kreis: 1, Quadrat: 1,038, Kreisquadrant: 1,067, Kreissector von 60°: 1,082, Rechteck vom Seitenverhältniss $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ 1,084, gleichseitiges Dreieck: 1,119, Halbkreis: 1,125, Rechteck mit $\frac{a}{b} = 2$ und gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck: 1,164, Rechteck, für welches $\frac{a}{b} = 3$ ist, 1,342.

Man sieht aus diesen Zahlen, dass man für den kleinsten ausgezeichneten Werth k^2 für einen Bereich, der nicht sehr stark von der Kreisform abweicht, einen ziemlich guten Näherungswerth erhält, indem man den Bereich durch die Kreisfläche *von gleichem Inhalt* ersetzt.

Allgemein lässt sich über die *Abhängigkeit der ausgezeichneten Werthe k^2 von den Dimensionen des Bereiches* höchstens soviel sagen, dass dieselben (ausgenommen den ausgezeichneten Werth k_1 bei der Grenzbedingung $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$, welcher ja immer $= 0$ ist, und die etwaigen negativen Werthe bei negativem h) sämmtlich *sehr gross* sein werden, wenn an

jeder Stelle die Dimension des Bereiches in *einer Richtung* sehr klein ist; es ist dazu *nicht* erforderlich, dass *alle* Dimensionen sehr klein sind. Daher kann man auch aus der *Anzahl* der Theile, in welche eine Membran durch die Knotenlinien getheilt wird, durchaus nicht auf die Höhe des Tones schliessen.

Mit der Berechnung *oberer Grenzen* für die ausgezeichneten Werthe irgend eines gegebenen Bereiches bei der Grenzbedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ (mit constantem h) hat sich *Poincaré* in seiner schon mehrfach genannten Abhandlung: „Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique"*) beschäftigt. Die von ihm angegebenen Methoden beruhen auf der Eigenschaft der ausgezeichneten Werthe k^2 als *Minima des Quotienten* $\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$ der Integrale

$$\varphi = \int\int \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} df + h\int u^2 ds, \quad \psi = \int\int u^2 df,$$

oder, wenn der Bereich ein räumlicher ist, der analogen Raum- bezw. Oberflächenintegrale. (Ueber diese Bedeutung der Grössen k^2 als Minima von $\frac{\varphi}{\psi}$ vgl. die Entwickelungen in § 4 dieses Theiles, S. 60.)

Da k_1^2 das *absolute* Minimum von $\frac{\varphi}{\psi}$ ist, so erhält man einen Werth, der jedenfalls *nicht kleiner* als k_1^2 ist, wenn man den Ausdruck $\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$ für eine *ganz beliebig* gewählte Function u berechnet. So kann man z. B. darin $u =$ Const. setzen, wodurch man, wenn S die Länge der Peripherie bezw. die Grösse der Oberfläche, J den Flächen- bezw. Rauminhalt des Gebietes bezeichnet, findet:

$$k_1^2 < \frac{hS}{J}.$$

Eine grössere Annäherung, d. h. eine kleinere obere Grenze, erhält man schon, wenn man für u eine lineare Function $\alpha x + 1$ einsetzt und die Constante α so bestimmt,

---

*) Amer. Journ. of Math. XII. No. 3. 1889.

dass der so berechnete Werth von $\frac{\varphi}{\psi}$ möglichst klein wird; diese Rechnung hat *Poincaré* ebenfalls durchgeführt. Natürlich könnte man so mit beliebigen Annahmen für u verfahren und würde dem wahren Werthe von $k_1{}^2$ im Allgemeinen um so näher kommen, je mehr willkürliche Constanten, durch deren Bestimmung man $\frac{\varphi}{\psi}$ möglichst klein macht, die angenommene Function u enthält.

Zur Berechnung einer oberen Grenze für $k_n{}^2$ giebt *Poincaré* folgendes Verfahren an, von welchem das soeben besprochene ein specieller Fall ist. Man bilde die Integrale φ und ψ für eine Function

$$u = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_n F_n,$$

wo $F_1 \ldots F_n$ willkürliche Functionen der Coordinaten, $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ willkürliche Constanten bedeuten. Dann ist

$$\varphi - \lambda\psi$$

offenbar eine quadratische Form von $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, deren Determinante gleich Null gesetzt eine Gleichung n^{ten} Grades für λ liefert, welche *lauter reelle Wurzeln* besitzt, weil die quadratischen Formen φ und ψ *definit* sind. Die Wurzeln dieser Gleichung, welche nach der Grösse geordnet $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ seien, sind die *Maxima bezw. Minima*, welche der Werth von $\frac{\varphi}{\psi}$ bei Variation der $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ annimmt; λ_n ist also der absolut grösste Werth, welchen $\frac{\varphi}{\psi}$ bei gegebenen Functionen $F_1 \ldots F_n$ erreichen kann. Derselbe ist sicher nicht kleiner, als das Maximum von $\frac{\varphi}{\psi}$ im Falle, dass zwischen den $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ *Bedingungsgleichungen* festgesetzt sind, insbesondere die $n - 1$ linearen Gleichungen, welche durch die Verfügung

$$\int u u_1 d\tau = \int u u_2 d\tau = \cdots = \int u u_{n-1} d\tau = 0$$

geliefert werden. In den letzteren Gleichungen bezeichnen $u_1 \ldots u_{n-1}$ die zu den $n - 1$ kleinsten ausgezeichneten Werthen $k_1^2 \ldots k_{n-1}^2$ gehörenden ausgezeichneten Lösungen der

Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, u ist $= \alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_n F_n$ und die Integrale sind über den ganzen gegebenen ebenen oder räumlichen Bereich, dessen Element $d\tau$ sei, zu erstrecken. In Folge jener $n-1$ Relationen zwischen den $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ ergiebt sich nun, da dieselben ja in u nur noch einen gemeinsamen Factor verfügbar lassen, *ein ganz bestimmter Werth* λ_n' für $\frac{\varphi}{\psi}$, welcher nach dem Vorhergehenden $\leqq \lambda_n$ ist. Andererseits folgt aber aus der Eigenschaft von k_n^2, das *Minimum* von $\frac{\varphi}{\psi}$ bei den Nebenbedingungen

$$\int u u_1 d\tau = \int u u_2 d\tau = \ldots = \int u u_{n-1} d\tau = 0$$

zu sein, dass $\lambda_n' \geqq k_n^2$ ist; folglich ist um so mehr

$$\lambda_n \geqq k_n^2.$$

Indem man also φ und ψ für die willkürliche Function

$$u = \alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_n F_n$$

berechnet und die grösste Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades $|\varphi - \lambda\psi| = 0$ bestimmt, findet man einen Werth, der eine obere Grenze für k_n^2 ist.

Ist ein Theil der Normalfunctionen $u_1 \ldots u_{n-1}$ bekannt, so lässt sich die Rechnung bedeutend vereinfachen. Kennt man insbesondere *alle* Functionen $u_1 \ldots u_{n-1}$, so kann man die oben mit λ_n' bezeichnete Grösse, welche ihrerseits schon eine obere Grenze für k_n^2 ist, wirklich bestimmen; man hat dazu nur die Verhältnisse $\alpha_1 : \alpha_2 : \ldots : \alpha_n$ aus den $n-1$ in $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ linearen Gleichungen

$$\int u u_1 d\tau = \cdots = \int u u_{n-1} d\tau = 0$$

zu berechnen, in $u = \alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_n F_n$ einzusetzen und den Quotienten $\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$ zu bilden. Dabei kann man über $F_1 \ldots F_n$ noch ganz willkürlich verfügen. Eine einfache Annahme ist z. B.

$$F_1 = u_1, \quad F_2 = u_2 \ldots F_{n-1} = u_{n-1},$$

während F_n willkürlich gelassen wird; es ergiebt sich dann zufolge der Integraleigenschaften der Normalfunctionen:

$$\alpha_1 = -\alpha_n \int F_n u_1 d\tau, \quad \alpha_2 = -\alpha_n \int F_n u_2 d\tau, \ldots$$
$$\alpha_{n-1} = -\alpha_n \int F_n u_{n-1} d\tau,$$

und die Function, für welche man $\frac{\varphi}{\psi} = \lambda_n'$ zu berechnen hat, ist

$$u = F_n - u_1 \int F_n u_1 d\tau - u_2 \int F_n u_2 d\tau \ldots - u_{n-1} \int F_n u_{n-1} d\tau.$$

(Es ist für dieses Resultat natürlich gleichgültig, in welcher Reihenfolge man $n-1$ der Functionen F den Normalfunctionen $u_1, \ldots u_{n-1}$ gleichsetzt.)

Zu bemerken ist noch, dass man im Falle der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ in dem Ausdrucke φ das Randintegral $h\int \bar{u}^2 ds$ bezw. das Oberflächenintegral $h\iint \bar{u}^2 do$ fortzulassen und dafür die Function u, mithin jede einzelne der willkürlichen Functionen $F_1 \ldots F_n$, der Beschränkung zu unterwerfen hat, dass sie an der ganzen Begrenzung des Bereiches den Werth 0 hat.

In der Arbeit von *Poincaré* findet sich auch ein Beweis für das *unbegrenzte Wachsen von k_n^2 mit unendlich wachsendem n*, welches man vom physikalischen Standpunkte als selbstverständliche Folge des früher (S. 38, 39 und 55, 56) aufgestellten Satzes ansehen wird, dass die ausgezeichneten Werthe k_n^2 stets eine *unendliche Reihe discreter* Werthe bilden, sofern der Bereich ganz im Endlichen liegt und keine Punkte enthält, in welchen die in der partiellen Differentialgleichung mit $k^2 u$ multiplicirte Function unendlich gross wird. Der Beweis von *Poincaré*, dessen Gang nachstehend wiedergegeben wird, bezieht sich nur auf die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und auf die Grenzbedingung $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$; letztere Annahme über die Grenzbedingung ist aber, wie wir unten sehen werden, keine Beschränkung.

Poincaré denkt sich den gegebenen Bereich T, dessen n erste Normalfunctionen $u_1, u_2 \ldots u_n$ seien, in $(n-1)$ Theilbereiche $T_1 \ldots T_{n-1}$ zerlegt; die Normalfunctionen und ausgezeichneten Werthe k^2 für den p^{ten} Theilbereich seien:

$$u_{p,1}, \quad u_{p,2} \ldots u_{p,n}; \quad k^2_{p,1}, \quad k^2_{p,2} \ldots k^2_{p,n}.$$

Hierzu ist zu bemerken, dass $k_1^2 = k^2_{p,1} = 0$, $u_1 = u_{p,1} =$ Const. (nämlich gleich dem reciproken Werthe des Flächen- bezw. Voluminhaltes des Bereiches) ist. — *Die Schlussweise Poincaré's beruht nun auf der Vergleichung von k_n^2 mit den Werthen $k^2_{p,2}$.* Wird gesetzt

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n,$$

und $\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$ für den ganzen Bereich gebildet, so ergiebt sich auf Grund der Integraleigenschaften von $u_1 \ldots u_n$:

$$\frac{\varphi(u)}{\psi(u)} = \frac{k_1^2\alpha_1^2 + k_2^2\alpha_2^2 + \cdots k_n^2\alpha_n^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}, \text{ also } < k_n^2.$$

Die bisher willkürlichen Constanten $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ werden nun den $n-1$ Bedingungen unterworfen, welche sich aus der Festsetzung

$$\int\limits_{T_1} u u_{1,1} d\tau = \int\limits_{T_2} u u_{2,1} d\tau = \cdots = \int\limits_{T_{n-1}} u u_{n-1,1} d\tau = 0,$$

wo die Integration bezw. über den 1ten, $2^{\text{ten}} \ldots (n-1)^{\text{ten}}$ Theilbereich auszudehnen ist, ergeben. Da nun $k^2_{p,2}$ das *Minimum* von $\left(\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}\right)_{T_p}$ bei der Nebenbedingung $\int\limits_{T_p} u u_{p,1} d\tau = 0$ ist, so ist sicher der Quotient der über den p^{ten} Theilbereich erstreckten Integrale $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ für $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ *nicht kleiner* als $k^2_{p,2}$. Demnach ist jedenfalls der mit $\left(\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}\right)_T$ identische Quotient

$$\frac{\varphi(u)_{T_1} + \cdots + \varphi(u)_{T_p} + \cdots + \varphi(u)_{T_{n-1}}}{\psi(u)_{T_1} + \cdots + \psi(u)_{T_p} + \cdots + \psi(u)_{T_{n-1}}}$$

grösser als der kleinste der Werthe $k^2_{p,2}$, welcher mit $k^2_{q,2}$ bezeichnet werde. Andererseits war gefunden

$$\left(\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}\right)_T < k_n^2;$$

folglich ist umsomehr

$$k_n^2 > k^2_{q,2}.$$

Nun kann man die Theilung des Bereiches T in $n-1$ Theilbereiche jedenfalls so ausführen, dass bei unbegrenzt wachsender Anzahl $n-1$ die sämmtlichen Dimensionen eines jeden Theilbereiches unendlich klein werden; dann folgt aber aus dem zu Anfang dieses Paragraphen Gesagten, dass alle $k^2_{p,2}$, also auch $k^2_{q,2}$, unbegrenzt wachsen, da man sich zu jedem unendlich klein werdenden Theilbereich immer einen ähnlichen von endlichen Dimensionen, welchem sicher ein endliches k^2_2 zukommt, construirt denken kann. (*Poincaré* giebt für das Unendlichgrosswerden der $k^2_{p,2}$ eine sehr umständliche Begründung.) Da aber $k_n^2 > k^2_{q,2}$ ist, so ist jetzt der Beweis erbracht, *dass k_n^2 mit unbegrenzt wachsendem Index n selbst in's Unendliche wächst.*

Dasselbe gilt auch für die ausgezeichneten Werthe k^2 im Falle der allgemeinen Grenzbedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$, da, wie sogleich gezeigt werden wird, k_n^2 bei constantem Index n und unveränderter Gestalt des Bereiches mit wachsendem h stets *zunimmt*, und der vorstehende Beweis ja für den Fall $h = 0$ gilt.

§ 12. Abhängigkeit der ausgezeichneten Werthe k^2 von der Constante h der Grenzbedingung.

Bisher wurde immer die Abhängigkeit der ausgezeichneten Werthe k^2 von der Gestalt und den Dimensionen des Bereiches betrachtet. Es ist aber auch von Interesse, zu untersuchen, wie sich die ausgezeichneten Werthe $k_1^2, k_2^2 \ldots k_n^2 \ldots$ eines gegebenen Bereiches *mit der in der Grenzbedingung* $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ *auftretenden Grösse* h (die wieder als längs der Begrenzung constant gelten soll) ändern. Mit dieser Frage hat sich *Poincaré* in der citirten Arbeit (Amer. Journ. of Math. XII) insoweit beschäftigt, dass er den *Sinn* jener Aenderung festgestellt hat.

Die der Grenzbedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ genügende Normalfunction u_n und der zugehörige Werth k_n^2 seien dadurch,

dass h in h' abgeändert ist, übergegangen in u_n', $k_n'^2$, wobei als selbstverständlich vorausgesetzt wird, dass diese Aenderungen *stetig* stattfinden. Wendet man nun auf die Functionen u_n, u_n', welche den Differentialgleichungen

$$\Delta u_n + k_n^2 u_n = 0, \quad \Delta u_n' + k_n'^2 u_n' + 0$$

genügen, den *Green'schen Satz* an, so erhält man auf bekannte Weise

$$(k_n^2 - k_n'^2) \int u_n u_n' d\tau = -\int \left(\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial n} \bar{u}_n' - \frac{\partial \bar{u}_n'}{\partial n} \bar{u}_n \right) d\sigma,$$

wo das Integral auf der linken Seite über den ganzen (ebenen oder räumlichen) Bereich, das auf der rechten über dessen ganze Begrenzung zu bilden ist. Führt man die Grenzbedingung ein, so wird diese Gleichung:

$$(k_n^2 - k_n'^2) \int u_n u_n' d\tau = (h - h') \int \bar{u}_n \bar{u}_n' d\sigma,$$

und wenn man nun h' unendlich wenig von h verschieden voraussetzt und dementsprechend $h' = h + dh$, ebenso $k_n'^2 = \lambda_n' = k_n^2 + d(k_n^2) = \lambda_n + d\lambda_n$ setzt:

$$d\lambda_n \cdot \int u_n^2 d\tau = dh \cdot \int \bar{u}_n^2 d\sigma. \tag{53}$$

Aus dieser Beziehung folgt, dass $\frac{d\lambda_n}{dh}$ stets > 0 ist, *demnach* $\lambda_n = k_n^2$ *mit wachsendem* h *beständig wächst, und umgekehrt.* Nur wenn u_n der Grenzbedingung $\bar{u}_n = 0$ genügt, also wenn $h = \infty$ ist, wird $\frac{d\lambda_n}{dh} = 0$.

Die Gleichung (53) gilt für jeden Index n, d. h. für jeden einzelnen ausgezeichneten Werth; auch für *negatives* h behält sie, da über h nichts vorausgesetzt worden ist, ihre Gültigkeit, sofern dafür noch ausgezeichnete Werthe k_n^2 existiren. Falls man sich auf *positive* Werthe von h beschränkt, ist also k_n^2 *am kleinsten* für $h = 0$. Für die ausgezeichneten Werthe $k^2 = \lambda$ in dem Falle, wo u_n der *allgemeinen* Differentialgleichung (13) S. 57 und der Grenzbedingung (14) genügt, folgt durch Subtraction der für u_n und $u_n + \delta u_n$ gebildeten Gleichungen (15') folgende Relation:

$$\delta \lambda_n \cdot \int\int A u_n^2 df = \int \bar{u}^2 \delta \alpha \, ds,$$

welche lehrt, *dass λ_n sicher stets zunimmt, wenn die in der Grenzbedingung auftretende Function α längs der ganzen Begrenzung positive Variationen $\delta\alpha$ erleidet.* Die von *Poincaré* gefundene Formel (53) ist als specieller Fall in der vorstehenden enthalten. —

Schon in § 4 dieses Theiles schlossen wir ganz allgemein aus der Gleichung (16), dass bei positivem α oder h *keine negativen* ausgezeichneten Werthe λ existiren können. Jetzt, wo wir die λ_n als Functionen von h betrachten, drängt sich uns die Frage auf, ob es auch für *negative* Werthe von h keine negativen λ_n geben kann. Ueber diese Frage giebt die Integralrelation (16), welche für Lösungen von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} + k^2 u = 0,$$

auf die wir uns jetzt beschränken wollen, die Form

$$k_n^2 = \lambda_n = h \int \bar{u}_n^2 ds + \int\int \left\{ \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial y} \right)^2 \right\} df$$

annimmt, uns keinen Aufschluss, da im Falle eines negativen h die rechte Seite möglicherweise negativ werden kann. Es bleibt daher wohl nichts Anderes übrig, als zunächst Beispiele zu betrachten. Diese werden lehren, dass für negatives h auch k^2 negativ werden kann, wodurch es sehr wahrscheinlich gemacht wird, *dass, falls das h der Grenzbedingung negativ ist, im Allgemeinen negative ausgezeichnete Werthe k^2 existiren.* Ein eigentlicher Beweis ist ja auch für die Existenz der positiven ausgezeichneten Werthe bei positivem h noch nicht erbracht, allein dieselbe konnte doch als physikalisch sichergestellt gelten. Bei negativem h ist aber auch letzteres nicht der Fall, weil es kein physikalisches Problem zu geben scheint, bei welchem die Grenzbedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ mit einem negativen Werthe von h auftritt und zugleich die Existenz von ausgezeichneten Lösungen durch die Erfahrung festgestellt oder evident wäre.

Betrachten wir zunächst die ausgezeichneten Lösungen für ein *lineares* Gebiet, also etwa die Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2 u = 0,$$

welche für $0 < x < a$ endlich und stetig sind und den Grenzbedingungen

$$hu - \frac{du}{dx} = 0 \text{ für } x = 0, \qquad hu + \frac{du}{dx} = 0 \text{ für } x = a$$

genügen. Diese Integrale sind bekanntlich:

$$u_n = \cos k_n(x - x_n),$$

wobei k_n, x_n sich aus den Gleichungen

$$\operatorname{tg} k_n x_n = \operatorname{tg} k_n(a - x_n) = \frac{h}{k_n}$$

bestimmen. Hieraus folgt die Gleichung zwischen k und h, auf die es uns allein ankommt, in der Form

$$\operatorname{tg}(ka) = \operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg} \frac{h}{k}\right);$$

die Wurzeln $k_n = \sqrt{\lambda_n}$ derselben zerfallen in zwei Gruppen, von denen die eine der Gleichung

$$h = \sqrt{\lambda} \operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\sqrt{\lambda}\right), \tag{54}$$

die andere der Gleichung

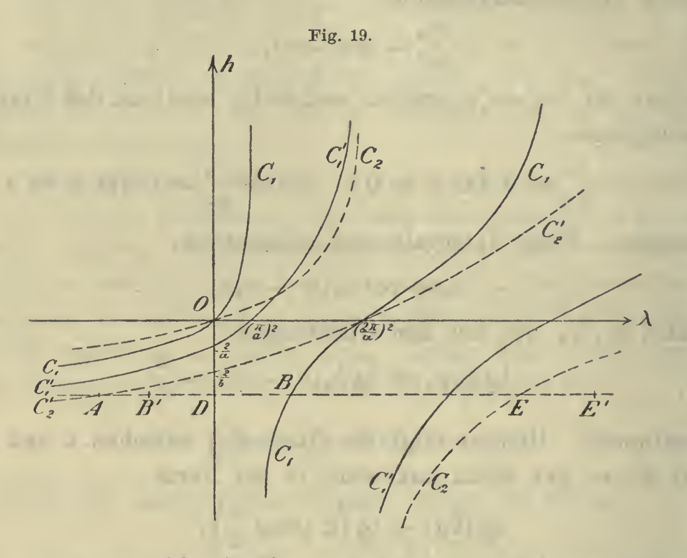
$$h = -\sqrt{\lambda} \operatorname{cotg}\left(\frac{a}{2}\sqrt{\lambda}\right) \tag{54'}$$

genügt.

Um sich die Beziehung zwischen h und den Wurzeln λ zu veranschaulichen, kann man die durch vorstehende Gleichungen gegebenen Curven construiren, indem man h als Ordinate, λ als Abscisse in einem rechtwinkligen Coordinatensysteme aufträgt. Die durch (54) dargestellte Curve C_1 besteht aus einer unendlichen Anzahl von Aesten, welche die λ-Axe in den Punkten $0, \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2, \left(\frac{4\pi}{a}\right)^2 \cdots$ schneiden und die der Ordinatenaxe parallelen Geraden $\lambda = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2, \left(\frac{3\pi}{a}\right)^2 \cdots$ zu Asymptoten haben (vgl. Fig. 19); ähnlich verläuft die durch (54') gegebene Curve (C_1' in der

Figur), nur sind für sie die Geraden $\lambda = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2, \left(\frac{4\pi}{a}\right)^2 \cdots$ Asymptoten und liegen die Schnittpunkte mit der Abscissen-

Fig. 19.



axe bei $\lambda = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2, \left(\frac{3\pi}{a}\right)^2 \cdots$. Jeder einzelne Curvenast steigt von $h = -\infty$ bis $h = +\infty$ beständig an. Besondere Beachtung erfordern nur die ersten Aeste der beiden Schaaren, von denen der eine die λ-Axe im Nullpunkte, der andere im Punkte $\lambda = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$ trifft; denn diese besitzen nur je eine Asymptote $\left(\lambda = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \text{ bezw. } \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\right)$ und *erreichen andererseits die h-Axe* in den Punkten $h = 0$ bezw. $h = -\frac{2}{a}$. Man überzeugt sich nun, wenn man der Variabelen λ in den Gleichungen (54), (54′) *negative* Werthe beilegt, wodurch sie in

$$h = -\sqrt{-\lambda} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\left(\frac{a}{2}\sqrt{-\lambda}\right)}{\mathfrak{Cos}\left(\frac{a}{2}\sqrt{-\lambda}\right)}, \quad h = -\sqrt{-\lambda} \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\left(\frac{a}{2}\sqrt{-\lambda}\right)}{\mathfrak{Sin}\left(\frac{a}{2}\sqrt{-\lambda}\right)}$$

übergehen, dass sich die erwähnten beiden Curvenäste in den zwischen der negativen h-Axe und der negativen λ-Axe liegenden Quadranten hinein *stetig* fortsetzen und dass sie bei

wachsendem $-\lambda$ beide parabelähnlich beständig absteigen; für sehr grosse Werthe von $-\lambda$ ist nahezu $h = -\sqrt{-\lambda}$, so dass sich in unendlicher Entfernung beide Curven in der That wie Parabeln verhalten, welche die λ-Axe zur Hauptaxe und gleichen Parameter haben.

Aus dem beschriebenen Verlauf der Curven folgt nun ohne Weiteres, dass zu einem negativen Werthe h, der $> -\frac{2}{a}$ ist, ausser einer unendlichen Anzahl positiver Werthe λ auch *ein negativer*, und im Falle $h < -\frac{2}{a}$ ist, *zwei negative* Werthe λ gehören. Für unendlich grosse negative Werthe h werden diese beiden negativen ausgezeichneten Werthe λ ebenfalls *unendlich gross*, während der kleinste positive Werth von λ gleich $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, also gleich demjenigen für $h = +\infty$ wird, und überhaupt *alle positiven λ in die für $h = +\infty$ geltenden übergehen.* Da nun dem Werthe $\lambda = -\infty$ keine zulässige ausgezeichnete Lösung u entspricht, weil die zweiten Differentialquotienten dann positiv unendlich werden, falls u überhaupt von 0 verschieden ist, so erhält man für $h = -\infty$ *genau dieselben ausgezeichneten Lösungen, wie für* $h = +\infty$, was auch so sein muss, weil man in Wirklichkeit beidemal *dieselbe Grenzbedingung* $\bar{u} = 0$ hat.

Gehen wir nun zum Falle des *Rechtecks* über, wo für das Seitenpaar $y = 0$, $y = b$ ebenfalls die Bedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ gestellt sei, so sind nach II. § 6 die ausgezeichneten Werthe $\lambda = k^2$ die Summe der obigen durch die Gleichungen (54), (54′) bestimmten, welche jetzt mit λ' bezeichnet werden mögen, und derjenigen (λ''), welche sich aus den Gleichungen (54), (54′) ergeben, wenn man darin a durch b ersetzt. Construirt man in der λh-Ebene nun noch das durch die so abgeänderten Gleichungen dargestellte, ganz ähnlich wie das oben betrachtete verlaufende Curvensystem (C_2, C_2' in Fig. 19), so ist aus Vorstehendem ersichtlich, dass man die einem gegebenen h entsprechenden ausgezeichneten Werthe λ dadurch erhält, dass man durch eine Parallele zur

λ-Axe in einem Abstande, der jenem h gleich ist, irgend einen Curvenast (C_1) der ersten Schaar und irgend einen (z. B. C_2') der zweiten schneidet; die Summen der Abscissen der erhaltenen Schnittpunkte A, B sind dann die gesuchten Werthe von λ. In Fig. 19, wo speciell $b = \frac{1}{2} a$ angenommen ist, stellen demnach die Strecken $B'A = AD' - DB$ und $DE' = DE + DB$ zwei zu $h = - OD$ gehörige Werthe λ dar. — Aus dieser Construction folgt, *dass es für einen endlichen negativen Werth h eine unendliche Anzahl positiver und eine endliche Anzahl negativer ausgezeichneter Werthe $\lambda = k^2$ giebt.* Die Anzahl der letzteren ist um so grösser, je grösser der absolute Werth des negativen h ist, und wird unendlich für $h = -\infty$, wo diese negativen Werthe λ zugleich selbst unendlich gross werden.

Als Beispiel für einen von einer einzigen Begrenzungslinie oder -Fläche umschlossenen Bereich eignen sich am besten die *Kreisfläche* und die *Vollkugel* wegen der einfachen Form ihrer Normalfunctionen. Die ausgezeichneten Werthe λ bestimmen sich bei beiden aus der Grenzbedingung

$$\left(h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right)_{r=\bar{r}} = 0$$

allein, so dass durch letztere unmittelbar die Gleichungen der Curven, welche die Beziehung zwischen h und den zugehörigen ausgezeichneten Werthen λ darstellen, gegeben sind. Für den *Kreis* lauten diese Gleichungen:

$$(55) \qquad h = -\sqrt{\lambda}\,\frac{J'_m(\bar{r}\sqrt{\lambda})}{J_m(\bar{r}\sqrt{\lambda})}, \; (m = 0, 1, 2 \cdots \infty),$$

und für die *Kugel* (cf. Formel (34)):

$$(56) \quad h = -\sqrt{\lambda}\,\frac{J'_{m+\frac{1}{2}}(\bar{r}\sqrt{\lambda})}{J_{m+\frac{1}{2}}(\bar{r}\sqrt{\lambda})} + \frac{1}{2\bar{r}}, \; (m = 0, 1, 2 \cdots \infty).$$

(Die in letzterer Gleichung auftretenden Functionen $J_{m+\frac{1}{2}}$ wurden in § 7, a dieses Theiles S. 98, 99 besprochen).

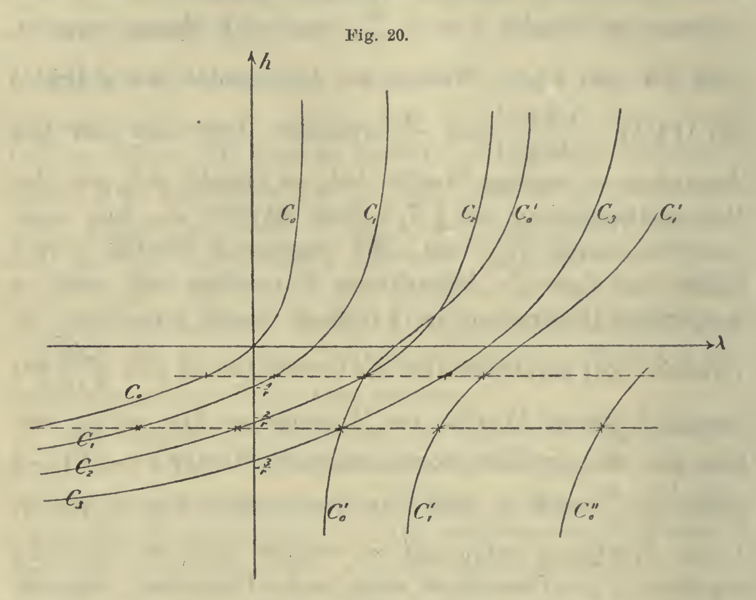
In beiden Fällen erhält man für jeden Index m eine aus unendlich vielen Aesten, welche je zwei Parallele zur

h-Axe zu Asymptoten haben und von $h = -\infty$ bis $h = +\infty$ ansteigen, bestehende Curve; nur der erste Ast besitzt nur *eine* Asymptote und *schneidet die Ordinatenaxe im Punkte* $h = -\frac{m}{\bar{r}}$, was sich daraus ergiebt, dass für sehr kleine Werthe des Argumentes sich $J_\nu(\bar{r}\sqrt{\lambda})$ auf $(\bar{r}\sqrt{\lambda})^\nu$, $\frac{J'_\nu(\bar{r}\sqrt{\lambda})}{J_\nu(\bar{r}\sqrt{\lambda})}$ auf $\frac{\nu}{\bar{r}\sqrt{\lambda}}$ reducirt. Legt man nun dem Argumente λ *negative* Werthe bei, so ergiebt sich aus der Reihenentwickelung (cf. § 7, a Seite 94) für J_ν, dass auch dann die durch (55) und (56) gegebenen Werthe h *reell bleiben* und dass die betrachteten Curvenäste sich *stetig* in den dritten Quadranten der $h\lambda$-Ebene hinein fortsetzen. Sie verlaufen dort parabelähnlich in's Unendliche, da sich $\frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)}$ für unendlich grosse Werthe des Argumentes wie $-\operatorname{tg} z$ verhält, also für unendlich grosse imaginäre Werthe $z = i\bar{r}\sqrt{-\lambda}$ gleich $+\frac{1}{i}$ wird, so dass man dann erhält: $h = -\sqrt{-\lambda}$. Jedem Werthe m entspricht ein solcher nach der Seite der negativen λ in's Unendliche verlaufender Curvenast; demnach ergeben sich für den Kreis und die Kugel Curvensysteme von der in Fig. 20 angedeuteten Beschaffenheit*). Legt man durch diese Curvensysteme eine Parallele zur λ-Axe im Abstande h von letzterer, so sind die Abscissen der erhaltenen Schnittpunkte die zu jenem h gehörigen ausgezeichneten Werthe λ. Man erkennt hieraus sofort, dass *jedem h unendlich viele positive ausgezeichnete Werthe $\lambda = k^2$ zugehören, dass es aber negative Werthe k^2 nur für negative Werthe von h und zwar auch dann nur in endlicher, mit $-h$ wachsender Anzahl giebt,* ganz wie wir es oben beim Rechteck auf etwas anderem Wege gefunden hatten. — Vermuthlich wird der eben

*) Der Index der Buchstaben C, mit welchen in obiger Figur die Curvenäste bezeichnet sind, stimmt mit der entsprechenden Zahl m überein. Den beiden negativen Werthen von h, für welche die zugehörigen Abscissen λ construirt sind, entspricht nach der Figur zufällig je eine *Doppelwurzel* λ.

ausgesprochene Satz *allgemeine* Gültigkeit haben, da sich bei stetiger Aenderung des Bereiches doch höchst wahrscheinlich auch die *negativen* ausgezeichneten Werthe k^2 *stetig*

Fig. 20.



ändern werden und demnach ihre Anzahl, sofern man jeden mit der ihm zukommenden Multiplicität*) zählt, ungeändert bleiben muss.

Man kann die bisherige Betrachtungsweise in der Weise umkehren, *dass man den Bereich und den Werth von k^2 als gegeben betrachtet und diejenigen Werthe aufsucht, welche die in der Grenzbedingung auftretende Constante h haben muss, damit $\Delta u + k^2 u = 0$ eine ausgezeichnete Lösung besitzt.*

Die im Vorhergehenden benutzte graphische Darstellung der Beziehung zwischen h und λ lässt sich sofort zur Lösung dieses umgekehrten Problems anwenden; man braucht nur eine Parallele zur h-Axe in dem gegebenen Abstande $\lambda = k^2$

---

*) Die negativen k^2 des Kreises und der Kugel besitzen natürlich dieselbe Multiplicität, wie die demselben Index m der Normalfunctionen entsprechenden positiven ausgezeichneten Werthe.

durch das Curvensystem zu legen und erhält durch die Ordinaten der Schnittpunkte direct die gesuchten Werthe von h. Die besprochenen Beispiele lassen leicht die vermuthlich allgemein gültige Regel erkennen, *dass zu jedem gegebenen* k^2 *unendlich viele Werthe* h *gehören, dass aber positive Werthe* h *nur für positive* k^2 *existiren und auch dann nur in endlicher Anzahl, sofern* k^2 *endlich ist.*

Insbesondere kann der gegebene Werth $k^2 = 0$ sein; es handelt sich dann um die Auffindung derjenigen Grenzbedingungen $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$, für welche es *Lösungen der Potentialgleichung* $\Delta u = 0$ giebt, die in dem gegebenen Bereiche überall eindeutig, endlich und stetig sind, ohne identisch gleich Null zu sein. Dass überhaupt bei gewissen *negativen* Werthen von h solche *ausgezeichneten Lösungen der Potentialgleichung* existiren, hat wohl zuerst *Dini* bemerkt bei der Behandlung des Problems, die Gleichung $\Delta u = 0$ für die Fläche eines *Kreises* so zu integriren, dass $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$ längs der Peripherie $r = \bar{r}$ vorgeschriebene Werthe besitzt*). Diese ausgezeichneten Lösungen für den Kreis sind die Functionen:

$$\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^m (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi)$$

mit unbestimmten Coefficienten a_m und b_m. Denn dieselben genügen offenbar der Gleichung $\Delta u = 0$ und der Randbedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = 0$, worin $h = -\frac{m}{\bar{r}}$ ist, und besitzen die gewöhnlichen Stetigkeitseigenschaften. — Bei unserer obigen Betrachtung über den Kreis fanden wir, dass die Ordinatenaxe ($\lambda = 0$) von den construirten Curven in den Punkten

$$h = -\frac{m}{\bar{r}} \; (m = 0,\ 1,\ 2 \cdots \infty)$$

geschnitten wurde; wir haben dort also eben jene von *Dini* aufgefundenen ausgezeichneten Werthe von h erhalten.

---

*) *Dini*, Annali di Matematica, (2), V, 1873. Vergl. über die oben genannte Aufgabe übrigens den IV. Theil der vorliegenden Darstellung. —

Für die *Vollkugel* ergaben sich *dieselben* Schnittpunkte $h = -\frac{m}{\bar{r}}$; in der That sieht man auch umgekehrt ohne Weiteres, dass die *ausgezeichneten Lösungen der Potentialgleichung für die Kugel*, nämlich die Functionen

$$u_{m,n} = \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^m \sum_0^m {}^n P_{m,n}(\vartheta)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

ebenfalls der Grenzbedingung

$$-\frac{m}{\bar{r}}\bar{u}_{m,n} + \frac{\partial \bar{u}_{m,n}}{\partial r} = 0$$

genügen. —

Der *kleinste* ausgezeichnete Werth von h im Falle $k^2 = 0$ ist für *jeden* Bereich $h = 0$, weil die Potentialgleichung für jeden beliebigen Bereich eine der Grenzbedingung $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ genügende ausgezeichnete Lösung, nämlich $u = \text{Const.}$ besitzt. Ueber die übrigen ausgezeichneten Werthe von h und die zugehörigen Lösungen der Potentialgleichung für beliebige Bereiche scheint noch nichts bekannt zu sein. —

Die letzten Betrachtungen, bei welchen im Gegensatz zu allen vorhergehenden Entwickelungen des II. Theiles *nicht mehr die Grenzbedingung, sondern k^2 als gegeben galt*, leiten gewissermassen schon zum folgenden Theile hinüber, in welchem die der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügenden Functionen ganz allgemein, *ohne Beschränkung auf einen gegebenen Bereich und also ohne Rücksicht auf eine Grenzbedingung, aber bei gegebenem k^2* betrachtet werden sollen.

III. Theil.

Allgemeine Sätze über die Functionen, welche der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügen.

Vorbemerkung. Dieser Theil soll von den Eigenschaften der Lösungen u in der Ebene und im Raume überhaupt handeln, in der Weise, wie etwa in der Potentialtheorie zuerst die allgemeinen Eigenschaften der Lösungen von $\Delta V = 0$ untersucht zu werden pflegen, d. h. ohne Berücksichtigung besonderer Grenzbedingungen. Er wird demnach von wesentlich mathematischem, nicht von unmittelbar physikalischem Interesse sein und soll zeigen, wie man für die der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügenden Functionen eine Theorie entwickeln kann, welche gewissermassen eine Verallgemeinerung der Potentialtheorie ist. Dementsprechend werden auch den für die Functionen u geltenden Sätzen die entsprechenden der Potentialtheorie gegenübergestellt, und in § 2 wird einer noch wenig bekannten Untersuchung der Potentialfunctionen, welche einen wichtigen Unterschied zwischen den letzteren und den Functionen u besonders gut hervortreten lässt, einiger Raum gewidmet werden. — Da bisher erst wenig ausgedehnte Untersuchungen in der bezeichneten Richtung vorliegen, so werden wir uns öfter nur auf Andeutungen beschränken müssen. Zunächst sollen nur Functionen u betrachtet werden, welche in der ganzen Ebene, bezw. im ganzen Raume *eindeutig* sind. Ferner werden wir in der Regel von einer Ausdehnung der Betrachtung auf die verwandten allgemeineren Differentialgleichungen Abstand nehmen.

§ 1. Verhalten der Functionen u in singulären Punkten im Endlichen.

Wie man in der Potentialtheorie von der Particularlösung $\log r$ bezw. $\frac{1}{r}$ ausgeht, aus welcher man die Potentiale mit höheren Singularitäten, sowie solche ableitet, für welche Gebiete von einer, zwei oder drei Dimensionen stetig mit „Massenpunkten", d. h. Punkten, in denen ΔV nicht mehr $= 0$ ist, erfüllt sind, so wird man auch in der Theorie der Functionen u diejenigen Particularlösungen zu Grunde legen, welche in der Ebene oder im Raume nur von dem Abstande r des variabelen Punktes von *einem* festen Punkte abhängen und letzteren als singulären Punkt besitzen.

Dies sind die im Nullpunkte unendlich gross werdenden Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + k^2u = 0 \text{ für die Ebene,}$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} + k^2u = 0 \text{ für den Raum,}$$

also nach II, § 7 a) und c) die Functionen $Y_0(kr)$ und $(kr)^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(kr)$. Die Bessel'sche Function zweiter Art 0ter Ordnung $Y_0(\varrho)$ ist definirt durch das bestimmte Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\varrho \sin\omega) \log(4\varrho\cos^2\omega)\, d\omega$$

oder durch die unendliche Reihe

$$J_0(\varrho)\log\varrho + 2\cdot\left\{\frac{1}{1}J_2(\varrho) - \frac{1}{2}J_4(\varrho) + \frac{1}{3}J_6(\varrho) - \cdots\right\},$$

welche sich für sehr kleine Werthe des Argumentes $\varrho = kr$ auf das Glied $\log\varrho$ reducirt; $Y_0(kr)$ wird also im Punkte $r = 0$ *logarithmisch unendlich gross*, und zwar sowohl, wenn k reell ist, als auch, wenn k rein imaginär ist. Die Function $(kr)^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(kr)$ ist identisch mit $\frac{\cos kr}{kr}$, wird also im Nullpunkte unendlich gross wie $\frac{1}{kr}$.

Die Singularitäten der nur von r abhängenden particulären Integrale von $\Delta u + k^2 u = 0$ in der Ebene und im Raume sind daher bei $r = 0$ von derselben Art, wie die der entsprechenden Potentialfunctionen. Dagegen findet in dem Verhalten *in unendlicher Entfernung* vom Nullpunkte keine solche Uebereinstimmung statt, wie im folgenden Paragraph näher ausgeführt werden soll.

Die gewöhnlichen Differentialgleichungen, welchen die nur von r abhängigen Functionen u genügen, besitzen noch die, *falls k reell ist,* in der ganzen Ebene bezw. im ganzen Raume *nirgends unendlich gross werdenden* Integrale

$$J_0(kr) \quad \text{bezw.} \quad \frac{\sin kr}{kr},$$

welche im Nullpunkte den Werth 1 haben und sich im Unendlichen ebenso verhalten, wie die zuerst besprochenen Integrale, nämlich daselbst von der $\frac{1}{2}^{\text{ten}}$ bezw. 1ten Ordnung unendlich klein werden. — Die Differentialgleichung des Potentials besitzt bekanntlich keine andere überall endliche und eindeutige Lösung, als $u = Const.$, und diese ist in der That das zweite Integral der gewöhnlichen Differentialgleichungen, welchen $\log r$ bezw. $\frac{1}{r}$ genügen. Es besteht in diesem Punkte also zwischen der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und der Potentialgleichung ein wesentlicher Unterschied, welcher übrigens mit der Existenz der *ausgezeichneten Lösungen* der ersteren auf's Engste zusammenhängt; denn $J_0(kr)$ und $\frac{\sin kr}{kr}$ sind gemäss unserer Definition als „ausgezeichnete Lösungen" für die unendliche Ebene und den unendlichen Raum zu betrachten.

Im Falle eines *negativen* Werthes von $k^2 = -k'^2$ können gemäss den Entwickelungen in II, § 4 (z. B. nach der geeignet specialisirten Formel (16)) für ein geschlossenes Gebiet, also wohl auch für die unendliche Ebene*), keine ausgezeich-

*) Zunächst lässt sich nur schliessen, dass für die unendliche Ebene keine überall endliche Lösung u, die längs irgend einer geschlossenen Curve gleich Null wird, existiren kann. Allein durch die

neten Lösungen existiren. Dementsprechend besitzt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - k'^2 u = 0$$

auch kein überall endliches Integral; $Y_0(k'ri)$ wird nämlich im Nullpunkte unendlich gross wie $\log r$, im Unendlichen wie $(k'r)^{-\frac{1}{2}} e^{k'r}$, und $J_0(k'ri)$ bleibt zwar für $r = 0$ endlich, verhält sich aber im Unendlichen ebenso wie $Y_0(k'ri)$. — Ebenso ist es mit den Particularlösungen im Raume; denn man kann aus $\frac{e^{+k'r}}{k'r}$ und $\frac{e^{-k'r}}{k'r}$ keine Lösung linear zusammensetzen, die weder für $r = 0$ noch für $r = \infty$ unendlich gross wird. —

Was nun die Singularitäten höherer Ordnung*) betrifft, welche eine sonst überall stetige und eindeutige Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ in einzelnen Punkten besitzen kann, so sind dieselben, wenn der gerade betrachtete singuläre Punkt der Nullpunkt des Polarcoordinatensystems ist, gegeben durch

(57) $\qquad Y_n(kr) \cdot \cos(n\varphi)$ für die Ebene,

(58) $\qquad (kr)^{-\frac{1}{2}} J_{-m-\frac{1}{2}}(kr) \cdot P_{m,n}(\cos\vartheta) \cdot {\cos \atop \sin} n\varphi$ für den Raum,

wo n und m irgend welche positive ganze Zahlen (wobei im zweiten Falle $n < m$) bezeichnen. Die Bessel'sche Function zweiter Art $Y_n(kr)$ verhält sich für sehr kleine Werthe von r, auf die es hier nur ankommt, wie $(kr)^{-n}$ (vgl. die Darstellungen von Y_n bei *Lommel*, Studien über die Bessel'schen Functionen, 1868, §§ 23–25, speciell p. 90, u. *C. Neumann*, Theorie der Bessel-schen Functionen, 1867, p. 52) und die durch die Reihe (30) S. 98, 99 definirte Function $(kr)^{-\frac{1}{2}} J_{-m-\frac{1}{2}}(kr)$ wie $(kr)^{-m-1}$.

---

in I, § 2, b (S. 19—20) erörterte physikalische Bedeutung der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ erscheint auch die Unmöglichkeit von Lösungen, die in der ganzen Ebene endlich sind und das Vorzeichen nicht wechseln, sicher gestellt.

*) Functionen u, welche *unendlich viele* oder *wesentlich* singuläre Punkte besitzen, schliessen wir von der Betrachtung ein für alle Mal aus

Die Potentialfunctionen verhalten sich nun in singulären Punkten höherer Ordnung in der Ebene wie $r^{-n} \cdot {\cos \atop \sin} (n\varphi)$, im Raume wie $r^{-m-1} P_{m,n}(\vartheta) {\cos \atop \sin} (n\varphi)$; mithin stimmen, was den Grad des Unendlichgrosswerdens anbetrifft, die höheren Singularitäten unserer Functionen u ebenfalls mit denjenigen des Potentials überein. Die Functionen, welche das Verhalten an den singulären Stellen darstellen, sind hier aber weit complicirter, als in der Potentialtheorie; so enthält z. B. Y_n ausser dem mit r^{-n} proportionalen Gliede noch solche, welche für $r = 0$ unendlich gross werden wie r^{-n-2}, r^{-n-4} etc. Sie lassen sich auch, wie *Rayleigh* l. c. II, 283 bemerkt, *nicht* einfach durch wiederholte Differentiation nach irgendwelchen Richtungen aus $Y_0(kr)$ und $\frac{\cos kr}{r}$ ableiten, während man bekanntlich nach *Maxwell**) die *Potentiale* mit einzelnen singulären Punkten höherer Ordnung auf diese Weise aus $\log r$ und $\frac{1}{r}$ erhält. Zwar genügen die aus $Y_0(kr)$ und $\frac{\cos kr}{r}$ durch Differentiation gewonnenen Functionen natürlich der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und werden auch in derselben Weise unendlich gross, wie $Y_n(kr) \cdot {\cos \atop \sin} (n\varphi)$ bezw. $(kr)^{-\frac{1}{2}} J_{-m-\frac{1}{2}}(kr) \cdot P_{m,n}(\vartheta) \cdot {\cos \atop \sin} (n\varphi)$, aber sie stimmen mit letzteren Functionen nicht direct überein. Nur die Function

$$J_{-\frac{3}{2}}(kr) \,.\, (kr)^{-\frac{1}{2}} \sum_0^2 P_{2,n}(\vartheta)\,(A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi)$$

ist auf die angegebene unmittelbare Weise zu erhalten, da

$$J_{-\frac{3}{2}}(\varrho) \,.\, \varrho^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\cos \varrho}{\varrho^2} + \frac{\sin \varrho}{\varrho}\right) = \frac{d}{d\varrho}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos \varrho}{\varrho}\right)$$

ist. Die besagte Nichtübereinstimmung hängt wohl damit zusammen, dass für die Functionen u kein analoger Satz gilt, wie der bei der Herleitung des erwähnten Maxwell-schen Resultates zu benutzende Satz von *Thomson*, welcher

*) Elektricität und Magnetismus, I, p. 191—194.

das Verhalten von Potentialfunctionen bei der Transformation durch reciproke Radien betrifft. (Vergl. über letzteren Punkt den folgenden Paragraph.) — Es sei noch bemerkt, dass die Singularitäten der eindeutigen Lösungen u, soweit sie durch das Anfangsglied der Entwickelung dargestellt werden, dieselben bleiben, wenn in der Differentialgleichung das Glied $k^2 u$ noch mit einer analytischen Function f der Coordinaten multiplicirt auftritt, weil man in der Umgebung des betrachteten singulären Punktes bei der Entwickelung von u nach den oben angegebenen Functionen die Function f als constant betrachten kann. — Demnach sind also z. B., wie aus dem zu Anfang von II, § 7, b Gesagten hervorgeht, für die Lösungen u auf der Kugelfläche die Singularitäten im Wesentlichen die gleichen, wie für die Functionen u in der Ebene; genauer werden sie durch die *Kugelflächenfunctionen zweiter Art*, d. h. die im Pole $\vartheta = 0$ unendlich gross werdenden, in Bezug auf φ periodischen Integrale der Differentialgleichung (31), welche zuerst von *Heine* untersucht worden sind, dargestellt.

Eine wichtige *physikalische Bedeutung* hat besonders die Singularität niedrigster Ordnung, welche durch $Y_0(kr)$ bezw. $\frac{\cos kr}{r}$ dargestellt wird. — Bei den *Luftschwingungen* ist ein solcher singulärer Punkt eine *einfache punktförmige Schallquelle* oder *ein Erregungspunkt* (*v. Helmholtz*, Crelle's Journal 57, p. 18. 1860), d. h. ein Punkt, in welchem abwechselnd mit gegebener Periode unendlich grosse Verdichtungen und Verdünnungen hervorgebracht werden; denn $u . \cos ak(t - t')$ ist das Geschwindigkeitspotential Φ der Luftschwingungen, und die Verdichtung ist $= -\frac{1}{a^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ (unter a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles verstanden), also ebenfalls proportional mit u. In Wirklichkeit wird nun eine solche „Schallquelle", welche sich im unendlichen Raume befindet, oder eine analoge in einer unendlichen ebenen Luftplatte, kugel- bezw. kreisförmige, gleichförmig *fortschreitende* Wellen aussenden, während die von uns betrachtete Function u, da sie mit einem Zeitfactor $\cos ak(t-t')$

multiplicirt das Geschwindigkeitspotential liefert, den Schwingungszustand *stehender* Wellen darstellt. Man kann sich aber die letzteren dadurch entstanden denken, dass die vom Erregungspunkte O ausgehenden Wellen mit einem gleichen, aus dem Unendlichen kommenden und gegen O hin convergirenden Wellenzuge interferiren; und umgekehrt lassen sich die fortschreitenden Wellen aus zwei geeigneten Systemen stehender Wellen mit um $\frac{\pi}{4}$ differirenden Phasen zusammensetzen, so dass der gerade erwähnte Unterschied nicht sehr wesentlich ist. —

In Wirklichkeit kann natürlich eine Schallquelle auch nicht *punktförmig* sein, da dann, damit sie eine endliche Menge Energie aussenden könnte, in diesem Punkte die Verdichtung und Verdünnung unendlich gross sein müsste; man hat sich vielmehr eine solche Schallquelle etwa als eine sehr kleine Kugel vorzustellen, welche sich periodisch radial zusammenzieht und ausdehnt, was auf dasselbe hinauskommt, als ob innerhalb derselben abwechselnd Luft hinweggenommen und hinzugefügt würde. In der Ebene hat man an Stelle dieser Kugel eine kleine Kreisfläche zu setzen. Man kann in letzterem Falle auch das Problem der schwingenden Membran zur Deutung des Erregungspunktes heranziehen, indem man sich vorstellt, dass auf die als starr anzusehende Fläche des kleinen Kreises eine periodische äussere Druckkraft wirkt; lässt man den Kreis unendlich klein werden, so muss, damit die Wirkung endlich bleibt, die Kraft und damit auch die Verrückung in ihrem Angriffspunkte unendlich gross werden. Diesen Grenzübergang kann man sich leichter an dem im I. Theile (§ 2, a) erwähnten statischen Probleme der Biegung einer gespannten Membran durch daraufgegossene Flüssigkeit veranschaulichen; man sieht dort ohne Weiteres, dass, wenn ϱ der Radius des kleinen starren Kreises, P die *gesammte* ausser dem hydrostatischen Drucke auf ihn wirkende Druckkraft und p die constante Spannung der Membran ist, $P + \varrho^2 \pi s u = - p \cdot 2\pi\varrho \cdot \frac{\partial u}{\partial r}$ sein muss, dass also $\frac{\partial u}{\partial r}$ bei gegebenem endlichem P für unendlich kleines ϱ unendlich

gross wie $\frac{1}{\varrho}$ oder $\frac{1}{r}$, u selbst somit logarithmisch unendlich gross wird.

Bei den Problemen der nichtstationären Wärmeleitung (Erkaltungsproblemen) ist die Deutung der singulären Punkte insofern nur etwas erzwungen möglich, als man in ihnen Wärmequellen anzunehmen hat, deren Ergiebigkeit wie eine Exponentialfunction $e^{-k^2 a^2 t}$ mit der Zeit abnimmt, wodurch dann eben das zeitliche Gesetz der Temperaturabnahme für den ganzen Körper gegeben ist, ebenso wie die Periode der erzwungenen Schwingungen einer Luftmasse oder Membran durch die Periode des Erregungspunktes. — Dagegen hat bei der *stationären* Wärmeströmung in einer ausstrahlenden Platte (I, § 2, b) ein Punkt, in welchem u logarithmisch unendlich gross wird, direct die Bedeutung einer *constanten* Wärmequelle, gerade wie sonst in der Theorie der stationären Wärmeströmung, wenn von der Ausstrahlung abgesehen, also $\Delta u = 0$ gesetzt wird.

Im Allgemeinen kann man nach dem Vorstehenden sagen, dass die singulären Punkte erster Ordnung bei den Schwingungsproblemen *Quellen von Energie* (nämlich Punkte, in denen äussere, unendlich grosse Kräfte während einer beliebigen endlichen Zeit endliche Arbeit leisten, deren Gesammtbetrag für die Dauer einer Periode jedoch, da es sich für uns stets um *stehende* Schwingungen handelt, immer $= 0$ ist), bei den Wärmeleitungsproblemen *Wärmequellen* (Punkte, welche durch Wärmezufuhr stets auf unendlich hoher Temperatur erhalten werden) sind. Mit Rücksicht auf diese physikalische Bedeutung mag es künftig gestattet sein, wenn die Function u in einem Punkte unendlich gross wie $-a \log r$ oder wie $\frac{a}{r}$ wird, die Constante a die *Intensität* dieses singulären Punktes erster Ordnung zu nennen.

Die singulären Punkte *zweiter Ordnung* lassen sich gemäss dem früher Gesagten als *Doppelquellen* deuten, welche entstehen, wenn zwei einfache Erregungspunkte von den Intensitäten $+a$ und $-a$ einander unendlich nahe rücken, während zugleich a in demselben Grade unendlich gross

wird. Bei den Luftschwingungen hat eine Kugel, welche als starrer Körper parallel einer bestimmten Geraden Sinusschwingungen ausführt, die Wirkung einer solchen Doppelquelle, und näherungsweise überhaupt jeder beliebige in der angegebenen Weise schwingende kleine Körper, welcher periodisch auf der einen Seite seiner Schwingungsaxe eine Verdichtung, auf der andern eine Verdünnung erzeugt. Bei den Schwingungen einer Membran und bei der Wärmeleitung hingegen kann man sich nicht gut eine physikalische Vorrichtung denken, welche einer Doppelquelle entspräche.

Die singulären Punkte höherer Ordnung können zwar, wie oben bemerkt wurde, nicht unmittelbar durch Zusammenrücken von solchen erster Ordnung hervorgebracht werden, wohl aber, wenn man verschiedene so entstandene Singularitäten superponirt; sie sind also als Aggregate von vielfachen Quellen von verschiedenem Grade der Complexität zu deuten. Solche vielfache Quellen lassen sich bei den Luftschwingungen insofern realisiren, als sie in ihrer Wirkung, wie wir später (in Theil IV) sehen werden, ersetzt werden können durch bestimmte Schwingungen einer um den singulären Punkt beschriebenen Kugelfläche. In roher Weise würde auch eine schwingende Glocke als vielfache Quelle, und z. B. eine Stimmgabel als vierfache, entstanden durch Zusammenrücken zweier symmetrisch zu einander liegender Doppelquellen, deren Axen in dieselbe Gerade fallen, angesehen werden können.

§ 2. Excurs über die Potentialtheorie; Verhalten der Potentiale und der Functionen u im Unendlichen.

Es wurde bereits oben darauf hingewiesen, dass in dem Verhalten im Unendlichen ein wesentlicher Unterschied zwischen den Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und den Potentialfunctionen besteht, im Gegensatz zu dem so ähnlichen Verhalten in solchen singulären Punkten, welche im Endlichen liegen. — Man erkennt diesen Unterschied leicht an den nur von r abhängigen Particularlösungen. So wird die Function $Y_0(kr)$ für sehr grosse Werthe von r

nahezu dargestellt durch $\frac{C' \cos kr + D' \sin kr}{\sqrt{kr}}$, unter C', D' Constanten verstanden; sie wird also für $\lim r = \infty$ nebst ihren sämmtlichen Derivirten *unendlich klein* wie $r^{-\frac{1}{2}}$, während das entsprechende logarithmische Potential im Unendlichen *logarithmisch unendlich gross* wird. Die Function $\frac{\cos kr}{kr}$ wird im Unendlichen von der ersten Ordnung unendlich klein; der Unterschied gegenüber dem Newton'schen Potential liegt hier erst im Verhalten der *Derivirten*, welche bei $\frac{\cos kr}{kr}$ sämmtlich auch nur von der *ersten* Ordnung, bei $\frac{1}{r}$ aber von höherer Ordnung unendlich klein werden. — Dieses Verhalten gilt indessen nur für den Fall, dass k *reell* ist; ist k rein imaginär $= k'i$, so werden diejenigen nur von r abhängigen Particularlösungen, welche sich im Nullpunkte wie $\log r$ bezw. $\frac{1}{r}$ verhalten, in unendlicher Entfernung von letzterem entweder unendlich klein wie $e^{-k'r}$ oder unendlich gross wie $e^{+k'r}$, zeigen also jedenfalls auch ein ganz anderes Verhalten, wie die entsprechenden Potentiale. Aehnliches würde sich bei einem Vergleich derjenigen nur von r abhängenden Particularlösungen der Differentialgleichungen $\Delta V = 0$ und $\Delta u + k^2 u = 0$ ergeben, welche bei $r = 0$ einen singulären Punkt höherer Ordnung besitzen.

Um einen besseren Einblick in diese Verschiedenheit des Verhaltens im Unendlichen zu gewinnen, ist es erforderlich, zu untersuchen, wie sich die betrachteten Functionen bezw. die Differentialgleichungen, denen sie genügen, bei der *Inversion* (Transformation durch reciproke Radien) verhalten; wir wollen uns daher im Folgenden näher mit dieser Frage, zunächst für die *Potentialfunctionen*, beschäftigen.

Da die Inversion eine *conforme Abbildung* vermittelt, so geht durch dieselbe ein *logarithmisches* Potential direct wieder in ein solches über. Ein *Newton'sches* Potential $V(x, y, z)$ liefert zwar nicht unmittelbar wieder eine Potentialfunction, wohl aber, wenn man die durch Inversion vom Nullpunkte aus in

Bezug auf die Kugel vom Radius 1 erhaltene Function $V\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)$ noch mit $\frac{1}{r}$ multiplicirt*).

Diese beiden Sätze lernt man von einem einheitlichen Gesichtspunkte aus verstehen, wenn man *homogene Variabele* einführt und einer Betrachtungsweise folgt, welche von *Darboux***) herrührt und von *F. Klein* in seiner Vorlesung über „Lamé'sche Functionen" in grösserer Allgemeinheit dargelegt worden ist. Diese Betrachtungsweise beruht darauf, dass der Raum von n Dimensionen (R_n) (wir lassen hier der Allgemeinheit wegen die Zahl der Dimensionen unbestimmt) als *stereographische Projection einer Kugel im Raume von* $n+1$ *Dimensionen* (R_{n+1}) aufgefasst wird, und dass als Variabele *homogene Coordinaten* $x_1 \ldots x_{n+2}$ *im* R_{n+1} eingeführt werden. Diese $n+2$ Variabeln sind demnach durch eine *Kugelgleichung* mit einander verknüpft, welcher wir hier die specielle Form geben wollen:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2 = 0,$$

so dass sie eine „Kugel" vom Radius 1 um den Coordinatenanfangspunkt darstellt, falls man $\frac{x_1}{x_{n+2}}, \cdots \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}$ als gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten deutet.

Die Grössen $x_1, \ldots x_{n+2}$ *sind im* R_n *proportional den mit bestimmten Constanten multiplicirten Potenzen des variabelen Punktes in Bezug auf* $n+2$ *feste „Kugeln"*, welche letzteren die stereographischen Projectionen der „Schnittkreise" der „Kugel" im R_{n+1} mit den „Coordinatenebenen" $x_1 = 0, \ldots, x_{n+2} = 0$ sind; sie können daher als *polysphärische Coordinaten* bezeichnet werden (speciell im R_3 als pentasphärische, im R_2 als tetracyclische nach *Darboux*). Zwischen ihnen und den gewöhnlichen homogenen Coor-

*) *W. Thomson*, Liouville's Journal XII, 1847.

**) Ueber die Einführung dieser „pentasphärischen" Coordinaten vergl. z. B. *Darboux'* Buch: Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires. Paris 1873. Ferner: Comptes Rendus LXXXIII (2), 1876, p. 1037 u. 1099 (Anwendung auf die Potentialtheorie).

dinaten $y_1, \ldots y_{n+1}$ des R_n bestehen die aus der stereographischen Projection folgenden Beziehungen, z. B. bei specieller Verfügung über die beiden Coordinatensysteme die nachstehenden:

$$\varrho y_1 = x_1, \quad \varrho y_2 = x_2, \ldots \varrho y_n = x_n, \quad \varrho y_{n+1} = x_{n+1} - x_{n+2},$$

$$\varrho \frac{\sum_1^n y_k^2}{y_{n+1}} = -(x_{n+1} + x_{n+2}).$$

Diese Formeln entsprechen im Falle $n = 2$ der Annahme, dass $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten im R_3, $\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}$ solche in der Aequatorebene ($x_3 = 0$) der Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$ sind, wobei die Coordinatenaxen $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ mit den Spuren der Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ zusammenfallen, und der Projectionspunkt der Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = x_4$ ist.

Den Inversionen des R_n von beliebigen Transformationsmittelpunkten aus und mit beliebigen Transformationsradien, verbunden mit Spiegelungen, Drehungen, Parallelverschiebungen und Aehnlichkeitstransformationen, entsprechen alle homogenen linearen Substitutionen der x_h, welche die Kugelgleichung $\sum_1^{n+1} x_h^2 = x_{n+2}^2$ ungeändert lassen.

Es sei nun im R_n eine *Potentialfunction* $V\left(\frac{y_1}{y_{n+1}} \cdots \frac{y_n}{y_{n+1}}\right)$ gegeben, d. h. eine Function nullten Grades von $y_1, \ldots y_{n+1}$, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial y_n^2} = 0$$

genügt. Dieselbe wird durch die stereographische Projection auf die „Kugel" im R_{n+1} übertragen, so dass man dort eine Function der Argumente $\frac{x_1}{x_{n+1} - x_{n+2}}, \cdots \frac{x_n}{x_{n+1} - x_{n+2}}$ erhält, welche die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} = 0$$

erfüllt. Hierbei ist der Projectionspunkt ($x_1 = x_2 \cdots = x_n = 0$, $x_{n+1} = x_{n+2}$) ein ausgezeichneter Punkt; allein man kann nun V zerlegen in einen Factor, welcher in einfacher Weise von letzterem Punkte abhängt, und einen zweiten Factor, welcher davon unabhängig ist, nämlich bei allen linearen Transformationen, welche die Kugel $\sum_1^{n+1} {}^h x_h^2 = x_{n+2}^2$ in sich überführen, ungeänderten Charakter behält. Zu diesem Zwecke ist zu setzen

$$V\left(\frac{x_1}{x_{n+1} - x_{n+2}}, \ldots \frac{x_n}{x_{n+1} - x_{n+2}}\right)$$
$$= (x_{n+1} - x_{n+2})^{\frac{n-2}{2}} \cdot W(x_1, x_2, \ldots x_{n+2}),$$

wo nun W eine Form $\frac{2-n}{2}$ ten Grades der Variabeln $x_1, \ldots x_{n+2}$ ist, während der erste Factor, gleich Null gesetzt, $\frac{n-2}{2}$ fach zählend die im Projectionspunkte berührende „Tangentialebene" der „Kugel" des R_{n+1} darstellt; im R_n bedeutet $x_{n+1} - x_{n+2} = 0$ den *unendlich fernen Punkt*. Wir müssen hier in der Geometrie der reciproken Radien nämlich das unendlich Weite im R_n als *Punkt* auffassen, weil es bei der stereographischen Projection aus einem Punkte hervorgeht; so würden wir im Falle $n = 2$ (siehe oben) nicht von der unendlich fernen *Geraden*, sondern vom unendlich fernen *Punkte* der Ebene reden müssen.

Es ist jetzt zu zeigen, dass die Form W in der That bei allen linaren Transformationen, welche die Gleichung $\sum_1^{n+1} {}^h x_h^2 = x_{n+2}^2$ in sich überführen, in ihrem Charakter ungeändert bleibt.

Ebenso wie V, genügt das oben eingeführte W zunächst der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial x_n^2} = 0$, da es sich ja von V nur durch einen von $x_1, \ldots x_n$ unabhängigen Factor

unterscheidet. Ferner enthält W gemäss der obigen Definition die Variabeln x_{n+1} und x_{n+2} nur in der Verbindung $x_{n+1} - x_{n+2}$, woraus folgt

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_{n+1}^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x_{n+2}^2} = 0.$$

Demnach genügt die jetzt betrachtete Form W der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_{n+1}^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x_{n+2}^2} = 0.$$

Mit dieser Gleichung ist nun der eigentliche Charakter der Form W ausgesprochen; denn es lässt sich zeigen, dass dieselbe unverändert bleibt, wenn man W unter Benutzung der Kugelgleichung $\sum_1^{n+1} x_h^2 = x_{n+2}^2$ irgendwie modificirt, nämlich einen Ausdruck $U = \left(\sum_1^{n+1} x_h^2 - x_{n+2}^2\right) X(x_1, \ldots x_{n+2})$ hinzufügt, worin X eine ganz beliebige Form vom $-\frac{2+n}{2}$ ten Grade bedeutet. Dies ergiebt sich auf folgende Weise. Es ist

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_h^2} = 2X + 4x_h \frac{\partial X}{\partial x_h} + \frac{\partial^2 X}{\partial x_h^2}\left(\sum_1^{n+1} x_h^2 - x_{n+2}^2\right) (h = 1, 2, \ldots n+1);$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_{n+2}^2} = -2X - 4x_{n+2} \frac{\partial X}{\partial x_{n+2}} + \frac{\partial^2 X}{\partial x_{n+2}^2}\left(\sum_1^{n+1} x_h^2 - x_{n+2}^2\right),$$

also, da der Factor der zweiten Differentialquotienten von X gleich Null ist,

$$\sum_1^{n+1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_h^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_{n+2}^2} = 2(n+2)X + 4 \sum_1^{n+2} x_h \frac{\partial X}{\partial x_h};$$

nach dem Euler'schen Theorem über homogene Functionen ist aber

$$\sum_1^{n+2} x_h \frac{\partial X}{\partial x_h} = -\frac{2+n}{2} X,$$

folglich

$$\sum_1^{n+1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_h^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_{n+2}^2} = 0,$$

d. h. U selbst, und daher auch das modificirte W genügt der oben für das specielle W gefundenen Differentialgleichung.

Diese letztere bleibt aber bei allen linearen Substitutionen der $x_1, \ldots x_{n+2}$, *welche die Gleichung* $\sum_1^{n+1} x_h^2 = x_{n+2}^2$ *in sich überführen*, also bei allen Inversionen (oder überhaupt bei allen Transformationen durch „Kugelverwandtschaften") des R_n, *unverändert*, aus demselben algebraischen Grunde, wie $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ bei allen orthogonalen Substitutionen von x, y, z invariant ist. Es ergiebt sich also der Satz:

Zerlegt man eine Potentialfunction des Raumes von n Dimensionen unter Anwendung polysphärischer homogener Coordinaten, welche durch die Relation $\sum_1^{n+1}{}_h x_h^2 - x_{n+2}^2 = 0$ *verbunden sind, durch Abtrennung eines Factors, der, gleich Null gesetzt, den* $\frac{n-2}{2}$*fach gezählten unendlich fernen Punkt des* R_n *darstellt, so bleibt eine homogene Function* $\frac{2-n}{2}$ *ten Grades der polysphärischen Coordinaten, eine* **Potentialform** *(K.), übrig, welche, wie man sie auch durch die zwischen den polysphärischen Coordinaten bestehende Relation umgestalten mag, der partiellen Differentialgleichung*

$$\sum_1^{n+1} \frac{\partial^2 W}{\partial x_h^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x_{n+2}^2} = 0$$

genügt und demnach ihren Charakter (der eben durch diese Gleichung bestimmt ist) bei allen Inversionen des R_n *behält**).

---

*) Führt man andere polysphärische Coordinaten ein, zwischen denen die Relation $\sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k = 0$ besteht, so lautet die Differentialgleichung für die Potentialform W, symbolisch geschrieben:

Im Falle $n = 2$ wird $W = V$; *das logarithmische Potential bleibt also bei der Inversion selbst ein solches,* wie ja hinlänglich bekannt ist und auch schon oben hervorgehoben wurde. — Im Falle $n = 3$, d. h. wenn es sich um das *Newton'sche Potential* handelt, wird W eine Form vom Grade $-\frac{1}{2}$. Wendet man hier die vorhergehende Entwickelung speciell auf die gewöhnliche Inversion an, so gelangt man zu dem auf S. 197 angeführten *Thomson'schen Satze,* wie nachstehend gezeigt werden soll*).

Sind $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten im Raume von drei Dimensionen, so erhält man polysphärische Coordinaten $x_1, \ldots x_5$, zwischen welchen die Relation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 0$ besteht, wenn man setzt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{n+2,1} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n+2,1} \cdots a_{n+2,n+2} & \frac{\partial}{\partial x_{n+2}} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial}{\partial x_{n+2}} & 0 \end{vmatrix} W = 0,$$

wobei unter einem bei Ausrechnung der Determinante entstehenden *Producte* $\frac{\partial}{\partial x_h} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot W$ der Differentialquotient $\frac{\partial^2 W}{\partial x_h \partial x_k}$ zu verstehen ist. Diese Gleichung bleibt unverändert bei allen linearen Transformationen, welche $\sum\sum a_{ik} x_i x_k = 0$ ungeändert lassen. W wird in diesem Falle aus dem Potential V erhalten durch Abtrennung eines Factors von der Form $\left(\sum_1^{n+2} A_i x_i\right)^{\frac{n-2}{2}}$, welcher gleich Null gesetzt wieder den unendlich fernen Punkt des R_n darstellt, und dessen Coefficienten A_i daher keiner anderen nothwendigen Bedingung unterliegen, als dass die mit den A_i geränderte Determinante der $a_{h,k}$ gleich Null ist.

*) Vergl. *Darboux,* Compt. Rend. LXXXIII (2), l. c.

$$x_1 = 2xt, \quad x_2 = 2yt, \quad x_3 = 2zt,$$
$$x_4 = -(x^2 + y^2 + z^2) + t^2, \quad x_5 = -(x^2 + y^2 + z^2 + t^2);$$
die fünf festen Kugeln des pentasphärischen Coordinatensystems im R_3 sind hier: die drei Coordinatenebenen (zu denen jedesmal die unendlich ferne Ebene resp. der unendlich ferne Punkt ($t = 0$) zugehört), die Einheitskugel um den Coordinatenanfangspunkt, die Kugel vom Radius i mit demselben Mittelpunkte. Die rechtwinkligen Coordinaten drücken sich dann wie folgt durch $x_1, \ldots x_5$ aus:
$$\frac{x}{t} = \frac{x_1}{x_4 - x_5}, \quad \frac{y}{t} = \frac{x_2}{x_4 - x_5}, \quad \frac{z}{t} = \frac{x_3}{x_4 - x_5},$$
und es ist
$$t^2 = \frac{1}{2}(x_4 - x_5), \quad x^2 + y^2 + z^2 = -\frac{1}{2}(x_4 + x_5).$$
Der Inversion in Bezug auf die Kugel
$$\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2} + \frac{z^2}{t^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x_4 = 0,$$
bei welcher $\frac{x}{t}$ in $\frac{xt}{x^2 + y^2 + z^2}$, $\frac{y}{t}$ in $\frac{yt}{x^2 + y^2 + z^2}$, $\frac{z}{t}$ in $\frac{zt}{x^2 + y^2 + z^2}$ übergeht, entspricht also die Vertauschung von x_4 mit $-x_4$. Nun ist nach der Definition der Potentialform W, wenn $V\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)$ der Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ genügt, einerseits,
$$V\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = V\left(\frac{x_1}{x_4 - x_5}, \ldots, \ldots\right) = t \cdot \sqrt{2} \cdot W(x_1, \ldots x_5),$$
andererseits
$$V\left(\frac{xt}{x^2 + y^2 + z^2}, \ldots, \ldots\right) = V\left(\frac{x_1}{-x_4 - x_5}, \ldots, \ldots\right)$$
$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot W(x_1, \ldots x_5).$$
Da nun W die Gleichung
$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_4^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x_5^2} = 0,$$
oder, weil x_4 und x_5 nur in der Verbindung $x_4 - x_5$ vorkommen, $\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$ erfüllt, so genügt

$$\frac{t}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} V\left(\frac{xt}{x^2+y^2+z^2}, \frac{yt}{x^2+y^2+z^2}, \frac{zt}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

derselben Differentialgleichung in Bezug auf x, y, z, wie $V\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)$. Dies ist aber gerade der Thomson'sche Satz, welcher ja aussagt, dass $\frac{1}{r} V\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$, wo r für $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ steht, ein Potential ist, falls $V(x, y, z)$ ein solches ist.

Doch kehren wir zur allgemeinen Betrachtung zurück. — Die vorhergehende Erörterung zeigt auf das Deutlichste, *dass für die Potentialfunctionen das unendlich Weite keine wesentlich ausgezeichnete Rolle spielt*; denn die durch Abtrennung eines *einfachen algebraischen Factors* erhaltene *Potentialform* bleibt ja bei der Inversion eine solche, d. h. die für sie charakteristische Differentialgleichung ändert sich dabei nicht.

Anders liegen die Verhältnisse bei den der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

genügenden Functionen. Diese Gleichung nimmt bei Einführung der homogenen Variabeln $y_1, \ldots y_{n+1}$ die Form an

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1{}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2} + \frac{k^2}{y_{n+1}^2} u = 0,$$

oder bei Einführung der durch die Relation $\sum_1^{n+1} x_h^2 = x_{n+2}^2$ verbundenen Variabeln $x_1, \ldots x_{n+2}$ die Form:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \frac{k^2 u}{(x_{n+1} - x_{n+2})^2} = 0.$$

Zerlegt man nun, analog wie beim Potential, u in

$$(x_{n+1} - x_{n+2})^{\frac{n-2}{2}} \cdot w,$$

so ergiebt sich für die Form w die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1{}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 w}{\partial x_{n+1}^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_{n+2}^2} + \frac{k^2 w}{(x_{n+1} - x_{n+2})^2} = 0.$$

In dieser ändert sich nun bei linearen Transformationen, welche $\sum_1^{n+1} x_h^2 - x_{n+2}^2$ *in sich selbst überführen, zwar*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 w}{\partial x_{n+1}^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_{n+2}^2}$$

nicht, wohl aber der Nenner des mit w selbst proportionalen Gliedes; die Form w behält also bei einer Inversion ihren Charakter n i c h t. Hieraus ist ersichtlich, dass sich die Functionen u im Unendlichen ganz anders verhalten müssen, wie in irgend einem im Endlichen gelegenen Punkte. Man überzeugt sich nun leicht entweder durch das oben bei den Potentialfunctionen angegebene Verfahren oder durch directe Umrechnung, *dass in Folge der gewöhnlichen Inversion* (vom Nullpunkte des rechtwinkligen Coordinatensystems x, y, z aus und mit dem Transformationsradius Eins) *zu dem Gliede $k^2 u$ der Differentialgleichung der Factor $\frac{1}{r^4}$ hinzutritt*; *d. h. also, wenn $u(x, y, z)$ eine Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ ist, so genügt $\frac{1}{r} \cdot u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right) = u'$ der Differentialgleichung:*

$$\Delta u' + \frac{k^2 u'}{r^4} = 0.$$

Der Factor von $k^2 u'$ wird im Nullpunkte, welcher dem ursprünglichen unendlich fernen Punkte entspricht, *unendlich gross vierter Ordnung;* folglich ist ersterer ein *singulärer Punkt der Differentialgleichung*, und man kann auch sagen, *der unendlich ferne Punkt ist ein singulärer Punkt der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$.* Dies gilt in gleicher Weise für die Ebene und für den Raum; denn der bei der Inversion hinzutretende Factor ist beidemal derselbe. —

Beispiele für das Verhalten von Functionen u, die der Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügen, im Unendlichen gewinnt man, wenn man die Inversion auf die im vorigen Paragraphen betrachteten Particularlösungen anwendet. So ergiebt sich, dass sich im Raume von drei Dimensionen die nur von r abhängige Lösung im Unendlichen verhält, wie $Ar \cos \frac{k}{r} + Br \sin \frac{k}{r}$ in der Nähe von $r = 0$; die Function selbst wird also in

dem singulären Punkte zwar unendlich klein, aber die erste *Ableitung* nach r wird schon *unendlich gross* (die Function macht bei Annäherung an den Nullpunkt unendlich viele unendlich kleine Oscillationen), so dass man es mit einem *wesentlich* singulären Punkte der Function zu thun hat. In der *Ebene* genügt $u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right)$ *selbst* der durch den Factor $\frac{1}{r^4}$ modificirten Differentialgleichung und verhält sich im Nullpunkte wie $J_0\left(\frac{k}{r}\right)$ oder $Y_0\left(\frac{k}{r}\right)$, besitzt also daselbst ebenfalls unendlich grosse Ableitungen. —

Wegen dieses singulären Verhaltens der Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ (und den verwandten Differentialgleichungen) im Unendlichen ist von vornherein gar nicht zu erwarten, dass Sätze über die Functionen u, welche für ganz im Endlichen liegende Bereiche abgeleitet sind, auch für Gebiete, die sich in's Unendliche erstrecken, entweder direct oder doch nach geringer Modification noch Gültigkeit behalten, wie man dies aus der Potentialtheorie gewohnt ist; in vielen Fällen wird dies thatsächlich nicht der Fall sein, und immer wird jene Uebertragung von Resultaten, die für endliche Gebiete gewonnen sind, grosse Vorsicht erfordern. Aus diesem Grunde werden wir uns im Folgenden in der Regel genöthigt sehen, uns auf die Betrachtung der Functionen u in *endlichen* Gebieten zu beschränken.

§ 3. Darstellung von u durch ein Rand- oder Oberflächenintegral auf Grund des Green'schen Satzes. Allgemeine Sätze von H. Weber. Weitere Folgerungen aus dem Green'schen Satze.

Bekanntlich hat *Riemann* die Stetigkeit eines, gewissen Voraussetzungen genügenden, übrigens aber beliebigen logarithmischen Potentials $V(x, y)$ aus der Formel bewiesen:

$$V(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\left(\log r\,\frac{\partial \overline{V}}{\partial n} - \overline{V}\,\frac{\partial \log r}{\partial n}\right) ds,$$

wo das Integral längs irgend einer den Punkt x, y umschliessenden Curve zu erstrecken ist, und r die Entfernung

eines Elementes ds dieser Curve vom Punkte x, y bezeichnet. Dieses Beweisverfahren hat nun *H. Weber* in seiner mehrfach genannten Abhandlung (Math. Ann. **1**) auf die Lösungen der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in der Ebene übertragen. Es lässt sich nämlich der Werth von u in irgend einem Punkte x_0, y_0 ebenfalls durch ein längs einer geschlossenen, denselben umschliessenden Curve gebildetes Integral darstellen, welches sich von dem obigen nur dadurch unterscheidet, dass die Bessel'sche Function zweiter Art $Y_0(kr)$ an Stelle von $\log r$ steht. Dies ergiebt sich, wie beim logarithmischen Potential, durch Anwendung des *Green'schen Satzes:*

$$(59)\quad \iint \left(\frac{\partial u'}{\partial x}\frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y}\frac{\partial u''}{\partial y}\right) dx\,dy = \int \bar{u}' \frac{\partial \bar{u}''}{\partial n} ds$$

$$- \iint u' \Delta u''\, dx\,dy = \int \bar{u}'' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial n} ds - \iint u'' \Delta u'\, dx\,dy$$

auf einen Bereich, aus welchem der Punkt x_0, y_0 durch einen kleinen Kreis ausgeschnitten ist, so dass die Randintegrale aus einem längs der Randcurve s und einem längs jenes kleines Kreises zu nehmenden Theile bestehen, wobei n immer die *nach Aussen* gerichtete Normale, also auf dem Kreise dem von x_0, y_0 aus gerechneten Radius r entgegen gerichtet ist. Setzt man nun für u' eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, für u'' die specielle Lösung $- Y_0(kr)$, welche im Punkte x_0, y_0 unendlich gross wie $-\log r$ wird, so wird $\iint u' \Delta u'' dx\,dy = \iint u'' \Delta u' dx\,dy$, und es bleibt von den Integralen, welche über den um x_0, y_0 beschriebenen Kreis zu erstrecken sind, wenn derselbe unendlich klein wird, nur $\int \bar{u} \frac{\partial Y_0(kr)}{\partial r} ds$ übrig, dessen Grenzwerth $= 2\pi u(x_0, y_0)$ ist. Folglich erhält man

$$(60)\qquad u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int \left\{ u \frac{\partial \overline{Y_0(kr)}}{\partial n} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} Y_0(k\bar{r}) \right\} ds.$$

Wenn diese Formel gilt, so ist $u(x_0, y_0)$ im ganzen von der Curve s umschlossenen Gebiete eine *analytische* Function. Mit Rücksicht auf die Bedingungen, unter welchen die Greensche Gleichung (59) überhaupt gültig ist und in die vor-

stehende (60) übergeht, das heisst, unter welchen nur die oben erwähnten Integrale übrig bleiben, dagegen diejenigen verschwinden, welche über die etwaige Unstetigkeitspunkte und Unstetigkeitslinien von u ausschneidenden Curven zu erstrecken sind, ergiebt sich daher der folgende, von *H. Weber* aufgestellte Satz:

Wenn eine Function u in einem endlichen ebenen Bereiche nur ausserwesentlich singuläre Punkte in endlicher Anzahl besitzt und den Bedingungen genügt, dass die Punkte, in denen die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ nicht erfüllt ist, keine Fläche, die Punkte, in denen u unstetig ist, keine Linie erfüllen, dass ferner an jedem Unstetigkeitspunkte $\varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho}$ mit dem von letzterem aus gerechneten Radiusvector ϱ unendlich klein wird, dass die Differentialquotienten von u nach der Normale einer beliebigen Linie stets beiderseits gleich sind, und dass endlich keine durch Aenderung des Werthes von u in einzelnen Punkten hebbaren Unstetigkeiten vorhanden sind, so ist die Function u nebst allen ihren Differentialquotienten im ganzen Bereiche endlich und stetig.

Unter entsprechenden Voraussetzungen lässt sich für die Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ im Raume von drei Dimensionen die Darstellung

$$(61)\quad u(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\int\!\!\int \left\{ \bar{u}\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos k r}{r}\right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\cdot\frac{\cos k\bar{r}}{\bar{r}} \right\} do$$

ableiten, worin das Doppelintegral über irgend eine, den Punkt x_0, y_0, z_0 ganz umschliessende Fläche zu bilden ist; hieraus folgt dann wieder, dass u eine analytische Function von x_0, y_0, z_0 ist. Diese Darstellung durch ein Oberflächenintegral findet sich zuerst bei *H. v. Helmholtz* in der schon früher erwähnten Arbeit (Crelle's Journal Bd. 57), welche überhaupt die erste allgemeine Untersuchung über die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ enthält, sodann wieder bei *Mathieu* *) und *Poincaré* **). Letzterer hat

*) Theorie des Potentials, Capitel III, § 10.

**) Amer. Journ. of Math. XII, § 4.

sie benutzen wollen, um die Stetigkeit der *ausgezeichneten* Lösungen zu beweisen; dies hat aber, abgesehen davon, dass seine Entwickelungen (schon wegen Unterdrückung der nöthigen Voraussetzungen) nicht ganz einwurfsfrei sind, wenig Werth, solange die *Existenz* der ausgezeichneten Lösungen, also solcher, welche in einem gegebenen Gebiete nicht unendlich gross werden und an der Oberfläche der Bedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ genügen, nicht mathematisch bewiesen ist; Poincaré giebt dies übrigens auch selbst zu.

Liegt der Punkt x_0, y_0 oder x_0, y_0, z_0 *ausserhalb* des Gebietes, über dessen Begrenzung die Integrale in (60) oder (61) genommen werden, so sind dieselben nicht gleich $u(x_0, y_0)$ bezw. $u(x_0, y_0, z_0)$, sondern gleich *Null*, da ja dann auch $Y_0(kr)$ oder $\frac{\cos kr}{r}$ im ganzen Bereiche stetig ist. Ferner gelten *immer*, sofern u in demjenigen Gebiete, welchem der Coordinatenanfangspunkt ($r = 0$) angehört, durchaus endlich und stetig ist, die Gleichungen:

$$\int \left\{ \bar{u} \frac{\partial J_0(k\bar{r})}{\partial n} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} J_0(k\bar{r}) \right\} ds = 0, \tag{62}$$

$$\iint \left\{ \bar{u} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\sin k\bar{r}}{\bar{r}} \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \frac{\sin k\bar{r}}{\bar{r}} \right\} do = 0, \tag{63}$$

welche dem Satze

$$\int \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} ds = 0 \quad \text{bezw.} \quad \iint \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} do = 0$$

der Potentialtheorie hinsichtlich ihrer Ableitung aus dem Green'schen Satze in gewisser Weise entsprechen. Für die vorstehenden Integrale, welche in der Potentialtheorie den Werth Null haben, erhält man dagegen hier, indem man in (59) $u' = u$, $u'' =$ Const. setzt, die Relationen:

$$\int \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds = -\iint k^2 u \, df, \quad \int \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} do = -\iiint k^2 u \, dv.$$

Hieraus folgt z. B., dass innerhalb einer geschlossenen Curve oder Fläche, längs welcher $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ist, u das Vorzeichen

wechseln, also längs mindestens einer Curve bezw. Fläche verschwinden muss.

Diese letzteren Gleichungen gestatten übrigens, wie die entsprechenden einfacheren der Potentialtheorie, eine einfache physikalische Interpretation.

Die erste, angewendet auf die *Schwingungen einer Membran*, auf deren innere Punkte keine äusseren Kräfte wirken, sagt aus, dass die Summe der am Rande der Membran senkrecht zu deren Ebene wirkenden Spannungscomponenten in jedem Zeitmoment gleich der Beschleunigung des *Schwerpunktes* der Membran, multiplicirt mit deren Gesammtmasse, ist; denn es ist $k^2 = \frac{\varepsilon}{p}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$, wenn ε die Dichte, T die Schwingungsdauer, p die Spannung bezeichnet. (Dieser Satz gilt für ein beliebig abgegrenztes Stück einer Membran; auf ein unendlich kleines Stück angewendet, kann er umgekehrt zur Ableitung der Bewegungsgleichung dienen, wie es z. B. in *Rayleigh's* „Theorie des Schalles“ geschehen ist.) Beim Problem der einfachen harmonischen *Luftschwingungen* bedeuten obige Gleichungen, dass durch irgend eine gedachte geschlossene Fläche, in deren Innerem sich kein Erregungspunkt befindet, in jedem Zeitelement ebensoviel Luft austritt, als die Gesammtänderung der Dilatation der eingeschlossenen Luftmasse beträgt. (Vergl. I, § 1, a.) Für die *stationäre Wärmeströmung* in einer frei ausstrahlenden Platte ist die Bedeutung der Gleichung

$$\int \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds = -\iint k^2 u \, df$$

unmittelbar evident (vergl. I, § 2, b). Für die *Erkaltung* eines leitenden Körpers, der keine Wärmequelle enthält, nach dem Gesetze $e^{-k^2 a^2 t}$ lässt sich die entsprechende Relation dahin deuten, dass die durch irgend eine innerhalb des Körpers construirte geschlossene Fläche, insbesondere durch seine Oberfläche, in dem Zeitelemente dt hindurchströmende Wärmemenge stets proportional ist der im Innern enthaltenen gesammten Wärmemenge (sofern man diese von der Temperatur der Umgebung an rechnet); die Erkaltung geht

daher ebenso vor sich, als ob jedes Theilchen des Körpers für sich nach dem Newton'schen Gesetze nach aussen Wärme ausstrahlte. —

Besitzt die Function u, auf welche der Green'sche Satz, während $u'' =$ Const. gesetzt ist, angewendet wird, innerhalb des betrachteten Gebietes Unstetigkeitspunkte, in denen sie unendlich gross wird wie $-a_h Y_0(kr)$ im Fall der Ebene oder wie $a_h \frac{\cos kr}{r}$ im Fall eines räumlichen Gebietes, so ergiebt sich auf bekannte Weise:

$$(64)\quad \begin{gathered} \int \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds = -\int\int k^2 u df - 2\pi \sum^h a_h \quad \text{bezw.} \\ \int\int \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} do = -\int\int\int k^2 u dv - 4\pi \sum^h a_h, \end{gathered}$$

welche Gleichungen sich für Membranen, auf die in einzelnen Punkten periodische Kräfte wirken, für schwingende Luftmassen, die einfache Erregungspunkte von den Intensitäten a_h, sowie für erkaltende Körper oder ausstrahlende Platten, die Wärmequellen von den Ergiebigkeiten a_h enthalten, wieder in dem oben erörterten Sinne deuten lassen.

Endlich sei noch erwähnt, dass für die soeben betrachteten Functionen u mit Unstetigkeitspunkten die Gleichungen bestehen

$$(65)\quad \begin{gathered} \int \left\{ \bar{u} \frac{\partial \overline{J_0}(kr)}{\partial n} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} J_0(k\bar{r}) \right\} ds = 2\pi \sum^h a_h J_0(kr_h), \\ \int\int \left\{ \bar{u} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\overline{\sin kr}}{r}\right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \frac{\sin k\bar{r}}{\bar{r}} \right\} do = 4\pi \sum^h a_h \frac{\sin kr_h}{r_h}, \end{gathered}$$

worin r_h die Entfernung des h^{ten} Unstetigkeitspunktes von dem beliebig gewählten Nullpunkte bezeichnet. Bei specieller Wahl des letzteren können daher die auf der linken Seite stehenden Integrale auch dann gleich Null werden, wenn die Function u Unstetigkeitspunkte besitzt. Die vorstehenden Gleichungen, oder, wenn man will, die Gleichungen (64), entsprechen den für die Potentialfunctionen geltenden Gauss-schen Sätzen*)

*) Diese und die übrigen in diesem und dem folgenden Paragraphen berührten Sätze der Potentialtheorie finden sich zuerst aus-

$$\int \frac{\partial \overline{V}}{\partial n} ds = -\frac{1}{2\pi} \sum a_h$$

bezw.

$$\int\int \frac{\partial \overline{V}}{\partial n} do = -\frac{1}{4\pi} \sum a_h.$$

Diejenigen Relationen, welche sich aus dem ersten Theile der Gleichung (59) ergeben, wenn man für u' und u'' zwei verschiedene oder eine und dieselbe Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ oder der allgemeineren Differentialgleichung (13) setzt, wurden bereits in II, § 4, S. 57—59 aufgestellt und mehrfach benutzt. —

Eine weitere Folgerung aus dem Green'schen Satze ist folgender Satz:

Eine Lösung u der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ *in der Ebene, welche längs eines beliebig kurzen Curvenstückes, oder eine solche im Raume, welche längs eines beliebig kleinen Flächenstückes zugleich mit ihrer ersten Ableitung nach dessen Normale verschwindet, ist überhaupt identisch gleich Null.*

Um diesen Satz für die Ebene zu beweisen, setze man (nach *H. Weber*) in der Green'schen Gleichung

$$\int\int (u' \Delta u'' - u'' \Delta u') df = \int \left(\bar{u}' \frac{\partial \bar{u}''}{\partial n} - \bar{u}'' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial n} \right) ds$$

für u' jene Lösung u und für u'' das logarithmische Potential $\log \frac{r}{R}$, wobei der Nullpunkt und der Radius R so gewählt werde, dass von demjenigen Curvenstück, auf welchem $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ist, und von dem Kreise mit dem Radius R ein Flächenstück begrenzt wird, innerhalb dessen und auf dessen Begrenzung u das Vorzeichen nicht wechselt; dies kann man (sofern unendlich dichte Häufung singulärer Punkte

---

gesprochen in der 1840 erschienenen berühmten Abhandlung von *Gauss:* „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte"; die Formel (59), aus welcher sie alle unmittelbar ableitbar sind, ist aber schon 1828 von *G. Green* in seinem „Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism" (wieder abgedruckt in Crelle's Journal **39**, **44** und **47** und in *Green's* Math. Papers, London 1871) aufgestellt worden.

und wesentlich singuläre Punkte ausgeschlossen werden) jedenfalls dadurch erreichen, dass man jenes Flächenstück hinreichend klein macht. Der Green'sche Satz, auf das letztere angewendet, ergiebt dann:

$$\iint k^2 u \log \frac{r}{R}\, df = \int \left\{ \bar{u}\, \frac{\partial \overline{\log r}}{\partial n} - \log \frac{\bar{r}}{R}\, \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right\} ds.$$

Das Randintegral verschwindet für das Curvenstück, auf welchem $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ist, und reducirt sich auf

$$\int \bar{u}\, \frac{\partial \log r}{\pm \partial r}\, ds = \pm \int \frac{\bar{u}}{R}\, ds$$

für den Kreisbogen, wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem r die äussere oder innere Normale des Kreisbogens ist. Im ersteren Falle ist innerhalb des Flächenstücks $\log \frac{r}{R} < 0$, im letzteren > 0; die Gleichung

$$\iint k^2 u \cdot \log \frac{r}{R}\, df = \pm \frac{1}{R} \int \bar{u}\, ds$$

steht demnach im Widerspruch zu den obigen Voraussetzungen, ausser wenn u constant $= 0$ ist. Man kann nun das Flächenstück, für welches jetzt der Satz bewiesen ist, successive erweitern, indem man immer neue, durch eine innerhalb des vorher betrachteten Flächenstückes liegende Curve und einen neuen Kreisbogen begrenzte Flächenstücke hinzufügt. So ergiebt sich, dass die Function u, soweit sie überhaupt mit den gewöhnlichen Stetigkeitseigenschaften definirt ist, identisch $= 0$ sein muss. Für den *Raum* ist der Beweis ganz analog zu führen, indem statt $\log \frac{r}{R}$ das Newton'sche Potential $\frac{1}{r} - \frac{1}{R}$ und statt des Kreises natürlich eine Kugelfläche zu Hülfe genommen wird.

Eine unmittelbare Folge dieses Satzes, welcher übrigens auch für die Lösungen der allgemeineren Differentialgleichung $\Delta u + k^2 f u = 0$ gilt, wenn f eine überall positive Ortsfunction bezeichnet, ist die, dass eine Lösung u in einem ebenen bezw. räumlichen Bereiche, in welchem sie die bekannten Stetigkeitseigenschaften besitzen soll, *vollständig*

bestimmt ist, sobald längs eines noch so kleinen Curven- bezw. Flächenstückes die Werthe von *u und* $\frac{\partial u}{\partial n}$ gegeben sind. Dasselbe gilt offenbar, wenn die Function u selbst, im Falle der Ebene für ein beliebig kleines Flächenstück, im Falle des Raumes für ein beliebig kleines räumliches Gebiet, gegeben ist. — Diese Eigenschaft bildet einen wesentlichen Unterschied zwischen den Lösungen der Differentialgleichungen vom elliptischen Typus überhaupt (vergl. I, B, § 4) und denen der Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus, z. B. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + k^2 u = 0$; denn für die letzteren können die Werthe von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ längs einer das ganze Gebiet durchziehenden Curve, sofern dieselbe nicht gerade eine Charakteristik ist, beliebig vorgeschrieben werden*). Der tiefere Grund dieses Unterschiedes liegt darin, *dass stetige Lösungen einer elliptischen Differentialgleichung auch analytisch sind, stetige Lösungen einer hyperbolischen oder parabolischen Differentialgleichung dagegen keineswegs nothwendigerweise.* —

Aus dem vorstehenden Satze ergiebt sich auch, dass zwei stetige Functionen, die in zwei in einer Fläche aneinandergrenzenden Räumen der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügen und an jener Fläche nebst ihren Differentialquotienten nach deren Normale übereinstimmen, analytische Fortsetzungen von einander sind, was *v. Helmholtz* l. c. auf etwas andere Weise, nämlich mit Hülfe der Formel (61), bewiesen hat. Ferner folgt aus dem oben bewiesenen Satze unmittelbar, dass eine Lösung in der Ebene, die längs einer Linie, oder eine Lösung u im Raume, die auf einer Fläche verschwindet, beim Ueberschreiten dieser Linie bezw. Fläche *das Vorzeichen wechselt.*

Eine letzte, aus dem Green'schen Satze ableitbare Eigenschaft der Functionen u wird wegen ihrer besonderen

---

*) Vergl. *Du Bois-Reymond,* Crelle's Journal **104,** 1889 und *Picard,* Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles etc., Journal de Mathématiques, sér. 4, t. VI 1890. Chap. II.

Wichtigkeit und der weitläufigeren Erörterungen, zu denen sie Anlass giebt, im folgenden Paragraphen besprochen werden.

§ 4. Über die Linien und Flächen, auf welchen die Functionen u verschwinden. Reihenentwickelungen für die Functionen u.

a. *Analogon zum Gauss'schen Mittelwerthsatze der Potentialtheorie und Folgerungen über die Existenz von Nulllinien bezw. Nullflächen.*

Bekanntlich ist der Werth einer Potentialfunction in irgend einem Punkte gleich dem arithmetischen Mittel aus den Werthen dieser Function auf irgend einem um diesen Punkt als Mittelpunkt beschriebenen Kreise bezw. auf einer um ihn beschriebenem Kugelfläche, vorausgesetzt, dass dieser Kreis oder diese Kugel keine singulären Punkte jenes Potentials umschliesst. Dieser Satz ergiebt sich durch Anwendung der Gleichung

$$V(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\left(\log\bar{r}\,\frac{\partial\overline{V}}{\partial n} - \frac{\partial\,\overline{\log r}}{\partial n}\,\overline{V}\right)ds$$

oder

$$V(x_0, y_0, z_0) = +\frac{1}{4\pi}\iint\left(\frac{1}{\bar{r}}\,\frac{\partial\overline{V}}{\partial n} - \frac{\partial\overline{\frac{1}{r}}}{\partial n}\,\overline{V}\right)do$$

auf einen Kreis oder eine Kugel mit dem Punkte x_0, y_0 oder x_0, y_0, z_0 als Mittelpunkt; denn in diesem Falle ist, die gewöhnlichen Stetigkeitseigenschaften von V vorausgesetzt, $\int\frac{\partial\overline{V}}{\partial n}ds$ oder $\iint\frac{\partial\overline{V}}{\partial n}do = 0$, sowie $\frac{\partial\,\overline{\log r}}{\partial n}$ constant $= \frac{1}{\bar{r}}$, $\frac{\partial\overline{\frac{1}{r}}}{\partial n}$ constant $= \frac{-1}{\bar{r}^2}\cdot$

Um zu einem entsprechenden Satze für die Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ zu gelangen, hat man die Gleichungen (60), (61) und (62), (63), welche unter den hier für u vorausgesetzten Stetigkeitsbedingungen gelten, auf den um den Punkt x_0, y_0 beschriebenen Kreis bezw. die um x_0, y_0, z_0 beschriebene Kugel anzuwenden. Man erhält dann aus (60)

und (62) für die Functionen u in der *Ebene* die beiden Gleichungen:

$$(60') \quad u(x_0, y_0) = \frac{\bar r}{2\pi} \frac{d\overline{Y_0(kr)}}{dr} \int_0^{2\pi} \bar u \, d\varphi - \frac{\bar r}{2\pi} Y_0(k\bar r) \int_0^{2\pi} \frac{\partial \bar u}{\partial r} d\varphi,$$

$$(62') \quad 0 = \frac{\bar r}{2\pi} \frac{d\overline{J_0(kr)}}{dr} \int_0^{2\pi} \bar u \, d\varphi - \frac{\bar r}{2\pi} J_0(k\bar r) \int_0^{2\pi} \frac{\partial \bar u}{\partial r} d\varphi,$$

und ebenso für die Functionen u im *Raume*:

$$(61') \quad \begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) = &- \frac{\bar r^2}{4\pi} \frac{d}{dr}\left(\overline{\frac{\cos kr}{r}}\right) \iint \bar u \, d\omega \\ &+ \frac{\bar r^2}{4\pi} \frac{\cos k\bar r}{\bar r} \iint \frac{\partial \bar u}{\partial r} d\omega, \end{aligned}$$

$$(63') \quad \begin{aligned} 0 = &- \frac{\bar r^2}{4\pi} \frac{d}{dr}\left(\overline{\frac{\sin kr}{r}}\right) \iint \bar u \, d\omega \\ &+ \frac{\bar r^2}{4\pi} \frac{\sin k\bar r}{\bar r} \iint \frac{\partial \bar u}{\partial r} d\omega. \end{aligned}$$

Hierin bezeichnet $\bar r$ den Radius des Kreises bezw. der Kugel, $d\omega$ die Oeffnung des von x_0, y_0, z_0 aus durch die Begrenzung des Flächenelements do der Kugel hindurch gelegten Kegels.

Multiplicirt man (60′) mit $J_0(k\bar r)$, (62′) mit $-Y_0(k\bar r)$ und addirt dann beide Seiten dieser Gleichungen, so folgt (wenn fortan u_0 statt $u(x_0, y_0)$ oder $u(x_0, y_0, z_0)$ geschrieben und der Strich über r fortgelassen wird):

$$u_0 . J_0(kr) = \frac{r}{2\pi}\left(J_0(kr) \frac{dY_0(kr)}{dr} - Y_0(kr) \frac{dJ_0(kr)}{dr}\right) \int_0^{2\pi} \bar u \, d\varphi.$$

Nun ist, da $J_0(kr)$ und $Y_0(kr)$ beide der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dy}{dr} + k^2 y = 0$$

genügen,

$$\frac{d}{dr}\left(Y_0 \frac{dJ_0}{dr} - J_0 \frac{dY_0}{dr}\right) + \frac{1}{r}\left(Y_0 \frac{dJ_0}{dr} - J_0 \frac{dY_0}{dr}\right) = 0,$$

$$Y_0 \frac{dJ_0}{dr} - J_0 \frac{dY_0}{dr} = \frac{C}{r}.$$

Der Werth der Constanten C ergiebt sich $= -1$, weil

für $r = 0$ der Ausdruck auf der linken Seite unendlich gross wird, wie $-\frac{d\log(kr)}{dr} = -\frac{1}{r}$. Demnach lautet die obige Gleichung zwischen u_0 und dem arithmetischen Mittel aus den Werthen $\bar{u}$:

$$(66) \qquad u_0 \, . \, J_0(kr) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{u}\, d\varphi \, .$$

Wenn man analog mit dem Gleichungspaar (61′), (63′) verfährt und dabei berücksichtigt, dass

$$\frac{\cos kr}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\sin kr}{r}\right) - \frac{\sin kr}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) = \frac{k}{r^2}$$

ist, so ergiebt sich für das arithmetische Mittel der Werthe $\bar{u}$ auf der Kugel vom Radius r die Relation:

$$(67) \qquad u_0 \cdot \frac{\sin kr}{kr} = \frac{1}{4\pi}\iint \bar{u}\, d\omega \, .$$

Eliminirt man umgekehrt aus (60′) und (62′) $\int \bar{u}\, d\varphi$, aus (61′) und (63′) $\iint \bar{u}\, d\omega$, so gelangt man zu einfachen Beziehungen zwischen u_0 und dem Mittelwerth von $\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$; dieselben lauten:

$$(68) \qquad u_0 \cdot k J_0'(kr) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\, d\varphi \, ,$$

$$(69) \qquad u_0 \cdot \frac{1}{r}\left(\cos kr - \frac{\sin kr}{kr}\right) = \frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\, d\omega \, .$$

Die Gleichungen (66), (67) gehen, wenn man $k = 0$ setzt, in den Gauss'schen Mittelwerthsatz, (68) und (69) dagegen in den Satz $\int \frac{\partial \bar{V}}{\partial n}\, ds = 0$ bezw. $\iint \frac{\partial \bar{V}}{\partial n}\, do = 0$ über.

Es sei noch erwähnt, dass sich die beiden ersten auch direct aus der in Polarcoordinaten transformirten Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ ableiten lassen, indem man dieselbe über einen Kreis oder eine Kugelfläche integrirt; auf diese Weise ist die Gleichung (66) zuerst von *H. Weber* (vergl. § 3 seiner Arbeit in Math. Ann. 1) und die Gleichung (67) von *v. Helmholtz* aufgestellt worden. —

Diese Gleichungen gestatten nun eine Reihe interessanter Schlüsse, welche für den Fall der Ebene grösstentheils schon von *H. Weber* gezogen worden sind. — Aus (66) und (67) folgt zunächst, wie in der Potentialtheorie, *dass durch einen Punkt, in welchem* $u (= u_0) = 0$ *ist, mindestens eine Linie bezw. Fläche hindurchgehen muss, auf welcher u verschwindet*; denn andernfalls könnten die Mittelwerthe auf einer um jenen Punkt beschriebenen Kreislinie bezw. Kugelfläche von *beliebigem* Radius nicht verschwinden, wie es doch nach den genannten Gleichungen thatsächlich der Fall ist. Ebenso ist aus (68) und (69) zu schliessen, dass durch einen Punkt, in dem $u_0 = 0$ ist, auch mindestens eine Linie bezw. Fläche hindurchgeht, längs welcher $\frac{\partial u}{\partial r}$ verschwindet.

Ferner muss u auf dem Kreise (der Kugel) vom Radius r den Werth $u_0 J_0(kr)$ $\left(\text{bezw. } u_0 \frac{\sin kr}{kr}\right)$ *mindestens an zwei Punkten* (bezw. auf einer geschlossenen Curve) annehmen, woraus folgt, dass u auf mindestens einer durch den Punkt x_0, y_0 (x_0, y_0, z_0) gehenden nicht geschlossenen Curve (Fläche) mit wachsendem r dieselben Werthe in derselben Reihenfolge annimmt, wie $u_0 J_0(kr)$ $\left(\text{bezw. } u_0 \frac{\sin kr}{kr}\right)$.

Aus dem Mittelwerthsatze der Potentialtheorie wird geschlossen, dass ein *Potential* für einen gegebenen Bereich niemals in Punkten *im Innern* desselben Maxima und Minima erreicht. Dieser Schluss lässt sich für die Functionen u *nicht* ziehen, *da der Mittelwerth* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{u}\, d\varphi$ bezw. $\frac{1}{4\pi}\iint \bar{u}\, d\omega$ *nicht vom Radius r des Kreises oder der Kugel unabhängig ist,* und in der That zeigen die im Theil II betrachteten Beispiele, am besten das des Kreises, dass es im Innern eines Bereiches geschlossene Curven (bezw. Flächen) und auch *Punkte* geben kann, wo u ein Maximum oder Minimum erreicht. — Daher kann man auch nicht schliessen, dass die Punkte, in denen $u = \text{Const.}$ ist, immer *Curven* (bezw. *Flächen*) erfüllen, wie

beim Potential; denn für bestimmte Werthe der Constanten kann es einzelne *Punkte* geben, in welchen u jenen (Maximal- oder Minimal-) Werth annimmt.

Besonders interessant ist der Umstand, dass es solche Werthe des Radius r giebt, für welche der Mittelwerth von $\bar{u}$ *verschwindet*, ohne dass der Werth von $u_0 = 0$ ist; es sind dies für die Ebene die Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$J_0(kr) = 0,$$

während sie für den dreidimensionalen Raum direct angebbar, nämlich $= \frac{n\pi}{k}$ sind, falls n eine positive ganze Zahl bezeichnet. Es gilt somit der Satz:

Auf einem Kreise bezw. einer Kugel von einem dieser speciellen Radien ist das arithmetische Mittel aus den Werthen u immer gleich Null, ganz einerlei, wo der Mittelpunkt liegt, sofern nur der Kreis oder die Kugel keinen singulären Punkt der Function u umschliesst.

Hieraus folgt, wenn man irgend eine in einem gewissen Gebiete der Ebene oder des Raumes eindeutige, endliche und stetige Lösung u betrachtet, *dass dieses Gebiet der Ebene von Linien, oder dieses Raumgebiet von Flächen durchzogen ist, auf welchen u verschwindet.* Die Dimensionen der Bereiche, in welche die Ebene oder der Raum durch diese Curven oder Flächen zerschnitten wird, sind wenigstens in *einer* Richtung kleiner als die kleinste Wurzel von $J_0(kr)$ in der Ebene und kleiner als $\frac{\pi}{k}$ im Raume (oder höchstens *gleich* diesen Werthen für ein kreis- bezw. kugelförmiges Gebiet); demnach ist die Gesammtzahl jener Bereiche, falls die *ganze* Ebene oder der *ganze* Raum in Betracht kommt, jedenfalls unendlich gross. In je zwei zusammenstossenden Gebieten hat u natürlich entgegengesetzte Vorzeichen. — In der Existenz dieser Nullcurven oder Nullflächen zeigt sich ein sehr wesentlicher Unterschied der Functionen u, welche der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügen, gegenüber den Potentialfunctionen, und eine klare *Analogie zu den periodischen Functionen*; in der That haben wir ja auch schon besondere

Functionen u kennen gelernt, die Producte aus trigonometrischen Functionen sind, und im Falle *einer* Variabeln gehen die Functionen u geradezu in $\sin kx$ und $\cos kx$ über. Man könnte die Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ oder noch allgemeiner diejenigen der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 f u = 0$, worin f eine durchaus positive analytische Function der Coordinaten ist, wegen des gerade besprochenen charakteristischen Verlaufes wohl zweckmässig als *oscillirende Functionen* bezeichnen. Specielle Fälle derselben sind diejenigen Functionen einer Variabeln, für welche wir im § 8 des II. Theiles das *Oscillationstheorem* bewiesen haben.

Es muss jedoch ausdrücklich bemerkt werden, dass das Vorstehende nur gilt, wenn k^2 *positiv* ist; bei negativem $k^2 (= - k'^2)$ existiren *keine* solche Systeme von Nullcurven oder Nullflächen, da die Factoren von u_0 in (66) und (67) dann $J_0(k'ri)$ und $\frac{e^{k'r} - e^{-k'r}}{2k'r}$ heissen und somit für keinen reellen Werth von r verschwinden. Das Verhalten der zu negativem k^2 gehörigen Functionen u ist daher demjenigen der Potentialfunctionen viel ähnlicher.

Die betrachteten Nullcurven und -Flächen sind physikalisch zu deuten als die *Knotenlinien einer unbegrenzten homogenen und gleichmässig gespannten Membran* bezw. als die *Bäuche* (Flächen, auf welchen keine Bewegung der Theilchen stattfindet) *bei den stehenden Schwingungen des unbegrenzten Luftraums bei gegebener Schwingungsdauer.* Hiernach ist plausibel, dass sie auch für die Functionen, welche der *allgemeineren*, den Schwingungen inhomogener Membranen oder Luftmassen entsprechenden Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 f u = 0$$

genügen, existiren müssen, sofern die Function f überall positiv ist. Ein mathematischer Beweis hierfür ist jedoch bisher nicht erbracht.

Gemäss den Gleichungen (68) und (69) giebt es bestimmte Radien $\bar{r}$ von der Art, dass auf jeder Kreislinie bezw. Kugelfläche, welche mit einem dieser Radien um einen beliebigen Mittelpunkt beschrieben ist, das arithmetische Mittel der

Werthe $\frac{\partial u}{\partial r}$ gleich Null ist; auf jedem dieser Kreise oder Kugelflächen muss daher $\frac{\partial u}{\partial r}$ mindestens zweimal das Zeichen wechseln. Hieraus lässt sich weiter folgern, dass es unendlich viele Curven in der Ebene bezw. Flächen im Raume giebt, längs welcher $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ (die Ableitung nach der Normale dieser Curven oder Flächen) verschwindet. Die Existenz dieser Curven (Flächen) ist indessen schon aus ihrer Eigenschaft als *orthogonale Trajectorien* der Curven (Flächen) $u =$ Const. zu erschliessen, welche letzteren nach dem vorhin über die Theilung der Ebene bezw. des Raumes durch die Nulllinien bezw. Nullflächen Gesagten in unendlich grosser Anzahl (die ganze Ebene bezw. den ganzen Raum erfüllend) vorhanden sind. Ausser auf diesen orthogonalen Trajectorien verschwindet übrigens $\frac{\partial u}{\partial n}$ auch noch längs solcher Curven bezw. Flächen, auf welchen u einen Maximal- oder Minimalwerth besitzt. (Vergl. das Beispiel der ausgezeichneten Lösungen für Kreis und Kugel.) Ueber die durch diese Curven und Flächen, auf welchen $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ist, erzeugte Zerschneidung der Ebene und des Raumes liessen sich ganz ähnliche Betrachtungen anstellen, wie über die Zerschneidung durch die Nullcurven und Nullflächen der Functionen u. Wir werden uns im Folgenden aber auf die letzteren beschränken, theils der grösseren Anschaulichkeit halber, theils, weil die Uebertragung der folgenden Resultate auf die Curven und Flächen, für welche $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ist, keinerlei Schwierigkeiten darbietet.

b. *Betrachtung der zu einem gegebenen Werthe k^2 gehörenden Elementarbereiche. Gesetzmässigkeiten in der Gestalt derselben.*

Wie wir gesehen haben, giebt es für irgend eine in einem Theile der Ebene eindeutige, endliche und stetige, der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügende Function eine grössere oder geringere Anzahl von *Nulllinien*; dieselben können theils in sich geschlossen sein, theils in's

Unendliche verlaufen, *immer aber theilen sie das betrachtete Gebiet der Ebene in Bereiche, deren Dimensionen wenigstens in einer Richtung endlich sind.* Ganz Analoges gilt für die Functionen u im *Raume.* Diese Bereiche nun, *innerhalb welcher die gerade betrachtete Function u ihr Vorzeichen nicht wechselt und an deren Rande sie verschwindet,* sollen die zu ihr gehörigen *Elementarbereiche* genannt werden. Man kann sich also die Aufgabe stellen, für einen gegebenen Werth k^2 und eine gegebene Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ die zugehörigen Elementarbereiche zu bestimmen, oder aber man kann auch nur den Werth von k^2 als gegeben betrachten und nach zu ihm gehörenden Elementarbereichen fragen, deren es dann natürlich eine unendliche Mannigfaltigkeit giebt. Diese letztere Fragestellung ist gerade die Umkehrung von derjenigen, welche uns im Theil II beschäftigte, wo die zu einem gegebenen Bereiche, an dessen Rande $u = 0$ sein sollte, gehörenden Werthe von k^2 zu ermitteln waren. Wie dort von ausgezeichneten Werthen von k^2 für einen gegebenen Bereich die Rede war, so könnte man auch umgekehrt von „*ausgezeichneten Bereichen*“ (d. h. ausgezeichneten Begrenzungscurven oder -Flächen) sprechen, die zu einem bestimmten Werthe k^2 gehören. —

Physikalisch würde die jetzt besprochene Problemstellung z. B. lauten: *Es soll die Gestalt solcher homogener Membranen gefunden werden, welche einen und denselben bestimmten Grundton geben.* Bei den Functionen u im Raume wäre eine Problemstellung von anschaulicher physikalischer Bedeutung (nämlich etwa diese: die Gestalt geschlossener Lufträume zu finden, welchen ein gegebener Grundton zukommt) wohl nur dann möglich, wenn diejenigen Elementarbereiche betrachtet würden, an deren Begrenzung $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ ist, was ja nach dem oben Gesagten in derselben Weise geschehen könnte, wie bei der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$.

Nach dem Vorstehenden *ist jede beliebige in einem Theile der Ebene bezw. des Raumes eindeutige, endliche und stetige Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ für bestimmte Bereiche eine*

„ausgezeichnete Lösung“ in dem früher definirten Sinne, so dass also bei der jetzigen Betrachtungsweise der Unterschied zwischen ausgezeichneten und allgemeinen Lösungen der Differentialgleichung verschwindet. —

Wir wollen nun zunächst einen Satz ableiten, welcher geeignet ist, die Vorstellung von der Theilung der Ebene (oder des Raumes) in Elementarbereiche etwas klarer zu machen, nämlich den Satz, *dass man zwei zu einem und demselben k^2 gehörige Elementarbereiche nie so über einander legen kann, dass der eine ganz in das Innere des andern fällt.* Der Beweis soll für Bereiche in der Ebene geführt werden, würde sich aber für den Raum vollständig analog gestalten.

Es seien u', u'' zwei zu demselben k^2 gehörige Lösungen der Differentialgleichung, und es werde angenommen, dass ein Elementarbereich T' von u' einem solchen T'' von u'' ganz oder doch mit Ausnahme einzelner gemeinsamer Stücke der Begrenzung in sich enthalte. Die Grenzcurve von T' werde mit a, diejenige von T'' mit b bezeichnet. Dann kann man annehmen, dass u' in T', u'' in T'' *positiv* ist; wäre dies von vornherein nicht der Fall, so brauchte man ja nur den Factor -1 in die betreffende Function u aufzunehmen. Da u an jeder Nulllinie das Zeichen wechselt, so ist bei dieser Festsetzung u'' in dem, allgemein zu reden, ringförmigen Bereiche zwischen a und b, sowie auf der Curve a überall *negativ*, wenn der Einfachheit wegen vorausgesetzt wird, dass zwischen a und b keine Nullcurve von u'' liegt. (Wäre letzteres der Fall, so würde man die folgende Betrachtung auf den Bereich zwischen jener Nullcurve und a anzuwenden haben.) Dann ist ferner $\frac{\partial u'}{\partial n}$ auf a und $\frac{\partial u''}{\partial n}$ auf b negativ, wenn unter n beidemal die aus dem Bereiche T' bezw. T'' hinaus gerichtete Normale verstanden wird. Wendet man nun den Green'schen Satz

$$\iint (u' \Delta u'' - u'' \Delta u') dx\, dy = \int \left(\bar{u}' \frac{\partial \bar{u}''}{\partial n} - \bar{u}'' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial n}\right) ds$$

auf den Bereich zwischen a und b an, so verschwindet das Doppelintegral, da u' und u'' beide der Differentialgleichung

$\Delta u + k^2 u = 0$ genügen, und man erhält, da u' längs a, u'' längs b gleich Null ist,

$$\int_b u' \frac{\partial u''}{\partial n} ds = \int_a u'' \frac{\partial u'}{\partial n} ds,$$

wobei n in dem angegebenen Sinne zu rechnen ist. Nach dem oben über die Vorzeichen von u', u'' und $\frac{\partial u'}{\partial n}$, $\frac{\partial u''}{\partial n}$ Gesagten sind nun alle Elemente des Integrals auf der linken Seite negativ, alle Elemente desjenigen auf der rechten Seite aber positiv; folglich ist die Annahme, dass der Bereich T' den Bereich T'' als Theil in sich enthalten könne, nicht möglich, und es müssen sich die Begrenzungen zweier zu demselben k^2 gehöriger Elementarbereiche, wie man dieselben auch übereinander legen mag, stets *schneiden.* Man kann dieses Resultat auch aus dem von *H. A. Schwarz* l. c. ebenfalls mit Hülfe der Green'schen Gleichung bewiesenen Satze folgern, dass die Grösse k^2 $\left(\text{bei ihm die Grösse } \frac{1}{c}\right)$ bei stetiger Zusammenziehung der Begrenzung des Bereiches stetig wächst; denn hiernach ist für einen Bereich, der *ein Theil* eines anderen ist, nothwendig k^2 grösser als für den letzteren, es können also zwei derartige Bereiche nicht als Elementarbereiche zu demselben k^2 gehören.

Einen speciellen Fall dieses Satzes haben wir schon bei Gelegenheit der *mehrfachen ausgezeichneten Werthe* k^2 ebener Bereiche kennen gelernt (cf. II, § 5, S. 66); „speciell“ ist der dort betrachtete Fall insofern, als die „zu einem mehrfachen ausgezeichneten Werthe k^2 gehörigen Lösungen“ solche Functionen u sind, *welche eine Nulllinie gemeinsam haben, die ein aus mehreren Elementarbereichen zusammengesetztes Flächenstück umschliesst.*

Es sei schliesslich hervorgehoben, dass zwei zu demselben k^2 gehörige Functionen u, die *einen* Elementarbereich gemeinsam haben, sich überhaupt nur durch einen constanten Factor unterscheiden und somit *alle* Elementarbereiche gemeinsam haben, da ja der *kleinste* ausgezeichnete Werth k^2 eines gegebenen Bereiches stets ein *einfacher* ist, also ein

solcher, zu dem nur *eine* Normalfunction gehört (vergl. das Verfahren von *Schwarz* zur Herstellung der letzteren, II, § 10), und da eine Lösung u, die in einem *Stück* der Ebene bezw. des Raumes gegeben ist, auch in ihrem *Gesammtverlauf* vollständig bestimmt ist. Demnach kann jede Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ durch einen bestimmten Bereich, nämlich irgend einen ihrer sämmtlichen Elementarbereiche, charakterisirt werden. Berücksichtigt man noch das Stetigkeitsprincip (S. 95) und die S. 167 erwähnte Beziehung der ausgezeichneten Werthe k^2 zu den Dimensionen des zugehörigen Bereiches, so gelangt man zu dem bemerkenswerthen Satze:

Die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ *mit gegebenem* k *besitzt immer eine und nur eine Lösung, für welche einer ihrer Elementarbereiche einem beliebig gegebenen Bereiche ähnlich ist.*

Diese Lösung wird im Allgemeinen bei analytischer Fortsetzung keineswegs überall eindeutig und stetig bleiben, obwohl man unendlich viele Bereiche vorschreiben kann, für welche dies eintritt. —

c. *Sätze über den Schnitt der Nullcurven und Nullflächen; Entwickelung der Functionen u für die Umgebung nicht singulärer Punkte.*

Nach einem von *Rankine* aufgestellten Satze schneiden sich zwei Niveauflächen des Newton'schen Potentials *rechtwinklig*, ausser wenn durch ihre Schnittlinie noch mehr Niveauflächen hindurchgehen, in welchem Falle sich dieselben alle *unter gleichen Winkeln* schneiden*). Analoges gilt für die Niveaulinien des logarithmischen Potentials. — Diese Eigenschaft der Niveaulinien und -Flächen lässt sich leicht aus der Entwickelung des Potentials für die Umgebung eines nicht singulären Punktes ableiten, und auf dem entsprechenden Wege werde ich nachstehend für die Functionen u den Satz beweisen:

Wenn n Nulllinien einer Function u in der Ebene durch

---

*) *Maxwell,* Electricität und Magnetismus; übersetzt von Weinstein. I. p. 169—171.

einen Punkt oder n Nullflächen einer Function u im Raume durch eine Curve hindurchgehen, so schneiden sich dieselben unter gleichen Winkeln von $\frac{\pi}{n}$.

Dass sich zwei Nullcurven bezw. -Flächen, wo sie sich allein treffen, *senkrecht* schneiden (was schon in II, § 6 bei der Construction der Knotenlinien des Quadrates benutzt wurde), lässt sich aus den Formeln (66) und (67) in Verbindung mit dem Taylor'schen Satze ableiten. Ist die Anzahl der sich schneidenden Nulllinien oder Nullflächen aber grösser, so ist erst die *Entwickelung der Functionen u für die Umgebung eines nicht singulären Punktes* überhaupt aufzustellen und dann für den Fall zu specialisiren, dass in dem betrachteten Punkte u den Werth 0 hat.

Man kann, wenn man den letzterem zum Nullpunkte eines Polarcoordinatensystems wählt, die Function u in der Ebene in eine Fourier'sche Reihe, im Raume in eine Reihe nach Kugelflächenfunctionen entwickeln, deren Coefficienten Functionen von r sind. Durch Einsetzen der Reihen in die partielle Differentialgleichung ergeben sich dann für jene Coefficienten die in II, § 7 betrachteten gewöhnlichen Differentialgleichungen (26′) und (33), von deren Integralen hier nur die im Nullpunkte *endlich* bleibenden oder verschwindenden, also $J_n(kr)$ bezw. $r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$, benutzt werden dürfen. Demnach erhält man folgende Reihenentwickelungen für u: in der Ebene

$$(70) \qquad u = \sum_0^\infty{}^n J_n(kr)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

im Raume

$$(71) \quad u = \sum_0^\infty{}^n (kr)^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \cdot \sum_0^n{}^m P_{n,m}(\cos\vartheta) \cdot (A_{n,m} \cos m\varphi + B_{n,m} \sin m\varphi).$$

Ueber die Convergenz dieser Reihen liegen, so viel mir bekannt, noch keine Untersuchungen vor; aber für hinreichend kleine Werthe von r, auf die es für den gegenwärtigen Zweck

nur ankommt, convergiren sie sicher. Um nun das Verhalten von u im Nullpunkte zu untersuchen, hat man nur das niedrigste Glied jeder Reihe beizubehalten; dasselbe sei (indem nämlich $A_0 = B_0 = \cdots = A_{n-1} = B_{n-1} = 0$ und $A_{o,m} = B_{o,m} = \cdots = A_{n-1,m} = B_{n-1,m} = 0$ angenommen wird)

$$J_n(kr)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

bezw.

$$(kr)^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \sum_0^n {}^m P_{n,m}(\cos\vartheta)(A_{n,m}\cos m\varphi + B_{n,m}\sin m\varphi),$$

wo nun auch die Bessel'schen Functionen durch die niedrigsten Glieder ihrer Potenzentwickelungen ersetzt werden können. Man sieht hieraus zunächst, dass u nur dann für $r = 0$ verschwinden kann, wenn die Ordnungszahl n des Anfangsgliedes $\geqq 1$ ist; ferner aber, dass in letzterem Falle in der Ebene durch den Nullpunkt n sich unter Winkeln von $\frac{\pi}{n}$ schneidende Linien hindurchgehen, auf welchen u verschwindet, und deren Tangenten im Nullpunkte durch $A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi = 0$ bestimmt sind, und dass im Raume durch den Nullpunkt Nullflächen von u hindurchgehen die sich daselbst wie die Kegel und Meridianebenen verhalten, auf welchen die Kugelflächenfunction

$$\sum_0^n {}^m P_{n,m}(\cos\vartheta)(A_{n,m}\cos m\varphi + B_{n,m}\sin m\varphi) = S_n(\vartheta, \varphi)$$

gleich Null ist. Damit sich die durch den betrachteten Punkt im Raume gehenden Nullflächen in einer *Linie* schneiden, muss sich diese Kugelflächenfunction $S_n(\vartheta, \varphi)$ auf eine *sectorielle*

$$\sin^n \vartheta \cdot (A_{n,n} \cos n\varphi + B_{n,n} \sin n\varphi)$$

reduciren; in diesem Falle ist aber klar, dass je zwei Nullflächen von u mit einander den Winkel $\frac{\pi}{n}$ bilden, weil dies von den Meridianebenen gilt, auf denen diese letztere Kugelflächenfunction verschwindet. — Damit ist der oben aufgestellte Satz bewiesen. Derselbe gilt auch noch für die Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 f . u = 0$, falls

die Function f als analytisch vorausgesetzt wird; denn in diesem Falle kann die letztere innerhalb eines sehr kleinen Bereiches als constant angesehen werden, und sind daher die Anfangsglieder der Entwickelung ebenfalls

$$J_n(kr)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \text{ bezw. } \sqrt{kr} \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(kr) S_n(\vartheta, \varphi).$$

Dagegen schneiden sich die Nulllinien oder Nullflächen der Lösungen der *allgemeinen* Differentialgleichungen von der Form (2) und (3) S. 20, in welchen $a_0 = 0$ sei, *nicht* unter gleichen Winkeln. Denn man erhält, wenn man die Functionen $a_{h,k}$ und a in dem betrachteten Bereiche als constant behandeln kann, den Verlauf jener Linien und Flächen aus dem für die Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ stattfindenden durch eine *affine Abbildung*, da man die Differentialgleichungen (2) und (3) mit constanten Coefficienten und fehlendem Gliede a_0 durch eine lineare Coordinatentransformation auf die Form $\Delta u + k^2 u = 0$ bringen kann; bei einer affinen Abbildung werden aber im Allgemeinen die Winkel zwischen zwei Linien bezw. Flächen geändert.

Die Reihenentwickelungen (70) und (71) sind das Analogon zu der Reihe $\sum_0^\infty {}^n r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$ für logarithmische Potentiale und zu der Entwickelung Newton'scher Potentiale nach steigenden räumlichen Kugelfunctionen. — Sie können u. a. dazu dienen, *beliebig viele zu einem gegebenen k^2 gehörende Functionen u hinzuschreiben*, indem man nämlich die Coefficienten A, B willkürlich annimmt, jedoch jedenfalls so, dass die Reihe convergirt; sofern man dann die Linien bezw. Flächen bestimmen kann, auf welchen die erhaltene Reihe verschwindet, findet man auch beliebig viele zu dem gegebenen k^2 gehörige *Elementarbereiche.*

Schliesslich sei hier noch einmal an das Verhalten der Functionen u an den ausserwesentlich *singulären Stellen* der früher betrachteten Art erinnert, welches, wie wir S. 190 sahen, durch die Functionen

$$Y_n(kr) \cos n(\varphi - \varphi_n) \quad \text{oder} \quad (kr)^{-n} \cos n(\varphi - \varphi_n)$$

bezw.

$$(kr)^{-\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(kr) S_n(\vartheta, \varphi) \quad \text{oder} \quad (kr)^{-n} S_n(\vartheta, \varphi)$$

dargestellt wird. Aus diesen Ausdrücken ist ersichtlich, dass auch für die durch solche singuläre Punkte hindurchgehenden Nulllinien oder -Flächen (sofern man die in der Nachbarschaft eines solchen Punktes auf ihn zulaufenden Nulllinien oder -Flächen so bezeichnet) dieselben Gesetzmässigkeiten hinsichtlich ihres Schnittes gelten, wie für diejenigen, welche sich in nicht singulären Punkten schneiden. Für die Umgebung eines singulären Punktes der betrachteten Art, d. h. eines solchen, in welchem sich u wie eine *rationale* Function verhält, kommt zu den Reihenentwickelungen (70) und (71) einfach noch eine endliche Anzahl von Gliedern der Form

$$Y_n(kr)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

bezw.

$$(kr)^{-\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(kr) S_n(\vartheta, \varphi)$$

hinzu.

§ 5. Continuirliche Vertheilung von Erregungspunkten auf Flächen und im Raume; Eigenschaften der entsprechenden Functionen u.

In der Potentialtheorie sind diejenigen Potentiale von der grössten Wichtigkeit, namentlich in physikalischer Hinsicht, welche entstehen, wenn singuläre Punkte erster oder zweiter Ordnung („Massenpunkte“ und „magnetische Moleküle“) Flächen- oder Raumstücke *stetig erfüllen*, während die Intensität (Masse, magnetisches Moment) jedes einzelnen unendlich klein wird. Um den Uebergang vom Punktpotential zu solchen Flächen- und Körperpotentialen zu machen, ersetzt man zunächst die singulären *Punkte* des ersteren durch *Flächen- oder Volumelemente von derselben Intensität* (d. h. von derselben Masse beim Gravitations- und elektrostatischen Potential, derselben Ergiebigkeit beim Geschwindigkeitspotential in der Hydrodynamik, demselben magnetischen Moment beim Potential magnetischer Moleküle etc.) und

lässt dann unendlich viele solche Flächen- und Volumelemente von unendlich kleiner Intensität sich zu endlichen Flächen- und Raumgebieten anhäufen.

Wie zuerst *H. v. Helmholtz* in seiner grundlegenden Abhandlung über die Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden (Crelle's Journal 57) hervorgehoben hat, kann man nun ebenso bei unseren Functionen u verfahren, und *muss* dies sogar eigentlich thun, wenn man physikalische Anwendungen im Auge hat, da ja in der Physik keine in mathematischen *Punkten* concentrirte periodische Kräfte, Schall- und Wärmequellen vorkommen. Wir wollen uns hierbei auf die Functionen u im *Raume* beschränken; für die *Ebene* (oder krumme Flächen) treten in leicht ersichtlicher Weise Linienbelegungen von Erregungspunkten an die Stelle der Flächenbelegungen, und von Erregungspunkten erfüllte Flächenstücke an die Stelle solcher Raumtheile. Die Constante k^2 kann im Folgenden sowohl positiv als negativ sein, wenn darüber nichts ausdrücklich bemerkt wird. —

Es ist für das Folgende von Wichtigkeit, die Bedeutung des Wortes *Function* zu präcisiren. Während man früher diese Benennung auf jede durch einen bestimmten *analytischen Ausdruck* dargestellte veränderliche Grösse anwandte, versteht man bekanntlich in der modernen Functionentheorie unter einer Function die Gesammtheit der *analytischen Fortsetzungen* eines Functionenelementes, d. h. der Werthe in einem beliebig kleinen Bereiche. Diese beiden Definitionen fallen keineswegs immer zusammen; es kann z. B. ein und derselbe analytische Ausdruck (etwa ein bestimmtes Integral) in zwei aneinander grenzenden Gebieten ganz *verschiedene* Functionen darstellen, oder er kann an einer Linie bezw. Fläche unstetig sein, indem er nur einen *Zweig* einer Function darstellt, die selbst durchaus stetig verläuft. Wir werden uns auf den neueren Standpunkt stellen und dementsprechend die *Helmholtz*'schen Sätze stellenweise im Ausdrucke modificiren.

Ist ein Raumgebiet T, welches übrigens aus beliebig vielen getrennten Stücken bestehen kann, von einfachen Erregungspunkten von der auf die Volumeinheit bezogenen Intensität ϱ

continuirlich erfüllt, und sind ausserdem im unendlichen Raume nirgends Erregungspunkte oder singuläre Punkte vorhanden, so ist eine Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ für den Raum *ausserhalb* des Gebietes T nach dem oben Gesagten gegeben durch

$$(72) \qquad u = \iiint\limits_{(T)} \varrho \frac{\cos kr}{r} dv + \iiint \varrho' \frac{\sin kr}{kr} dv,$$

wo r die Entfernung des Punktes x, y, z, für welchen der Werth von u angegeben wird, vom Volumelement dv bezeichnet, und das erste Integral über den Raumtheil T, das zweite über den *ganzen* Raum zu erstrecken ist. Dieses zweite Integral, in welchem ϱ' an jeder Stelle des Raumes beliebig vorgeschrieben sein kann, sofern nur das Integral einen Sinn hat, stellt eine *im ganzen Raume endliche* Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$, also eine *ausgezeichnete Lösung für den unendlichen Raum* dar und entspricht *der willkürlichen Constanten*, welche im *Newton'schen Potential* einer gegebenen Massenvertheilung unbestimmt bleibt. Man sieht, dass hierbei in der Theorie der Functionen u eine ausserordentlich viel grössere Unbestimmtheit besteht, als in der Potentialtheorie, was man sich auch an der physikalischen Bedeutung dieser Functionen als Geschwindigkeitspotentiale der Luftschwingungen von gegebener Schwingungsdauer leicht klar machen kann; denn ausser den durch die gegebenen Schallquellen erregten Schwingungen können ja im unendlichen Raume irgendwelche stehende Wellen von der gleichen Periode, die für sich weiterbestehen, vorhanden sein.

H. v. Helmholtz nennt a. a. O. den Ausdruck (72) das *Geschwindigkeitspotential der den Raum T stetig erfüllenden Erregungspunkte* und die Grösse ϱ *die Dichtigkeit der Vertheilung der Erregungspunkte*; dazu ist selbstverständlich zu bemerken, dass eigentlich erst die mit einer trigonometrischen Function der Zeit: $\cos \frac{2\pi}{T}(t - t')$ multiplicirte Function u das Geschwindigkeitspotential der Luftschwingungen bedeutet.

Das Integral $\iiint \varrho' \frac{\sin kr}{kr} dv$ genügt im *ganzen* Raume,

auch da, wo ϱ' von Null verschieden ist, der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, weil die Function $\frac{\sin kr}{kr}$ auch noch im Punkte $r = 0$, wo sie den Werth 1 annimmt, jene Differentialgleichung erfüllt. Dagegen genügt das Integral

$$u' = \iiint \varrho \frac{\cos kr}{r} dv,$$

betrachtet als Function der Coordinaten des Punktes x, y, z, der obigen Differentialgleichung nur in dem Raume *ausserhalb* T, während für sie *innerhalb* des von Erregungspunkten erfüllten Gebietes T die Differentialgleichung

$$\Delta u' + k^2 u' = -4\pi\varrho$$

besteht. Dass letztere Gleichung wirklich erfüllt ist, ergiebt sich genau in derselben Weise, wie für das Körperpotential $\iiint \varrho \frac{dv}{r}$; denn zerlegt man u' in ein Integral u'', welches über den ganzen Raum T mit Ausschluss einer sehr kleinen, den betrachteten Punkt P umgebenden Kugel erstreckt ist, und in ein über die letztere genommenes Integral u''', so erfüllt u'' wie gewöhnlich die Gleichung $\Delta u'' + k^2 u'' = 0$, und u''' ist, da der Radius der erwähnten Kugel jedenfalls sehr klein gegen $\frac{1}{k}$ angenommen werden kann, bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung durch das Newton'sche Potential $\iiint \frac{\varrho\, dv}{r}$ jener Kugel ersetzbar, für welches bekanntlich $\Delta u''' + k^2 u''' = -4\pi\varrho$ ist. Dabei ist allerdings vorausgesetzt, dass ϱ gewissen Stetigkeitsbedingungen genüge, auf welche hier nicht näher eingegangen werden soll; man vergleiche über diesen Gegenstand die Dissertation von *O. Hölder* (Beiträge zur Potentialtheorie; Stuttgart 1882).

Aus Vorstehendem folgt, dass im Gebiete T der durch (72) dargestellte Ausdruck der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u = -4\pi\varrho \tag{73}$$

genügt. — Die hier angedeutete Ableitung dieses Satzes ist bei *Helmholtz* vollständig durchgeführt und findet sich ähnlich in

Mathieu's Potentialtheorie, Cap. X, § 8; *Mathieu* nennt den Ausdruck u' *calorisches Potential* wegen seiner Bedeutung für die nichtstationäre Wärmeströmung. Dass im Falle stetig vertheilter *äusserer Kräfte* die Differentialgleichung für das Geschwindigkeitspotential der Luftschwingungen, wie auch diejenige für die Verrückungen einer schwingenden Membran, ein Glied enthält, welches eine *gegebene Function der Coordinaten* ist, wurde übrigens schon in § 1 des I. Theiles hervorgehoben; daher wurde in die in I, § 3 aufgestellte allgemeinste Form der von uns überhaupt betrachteten Differentialgleichungen ((2), (3) und (4)) auch ein solches Glied (a_0) aufgenommen.

Aus dem schon in § 2 dieses Theiles besprochenen Verhalten der Functionen $\frac{\cos kr}{r}$ und $\frac{\sin kr}{kr}$ im Unendlichen folgt, analog wie aus dem Verhalten von $\frac{1}{r}$ für das Newton'sche Körperpotential, für die durch (72) ausserhalb T gegebene Function u, dass sie in unendlich grosser Entfernung nebst ihren ersten Differentialquotienten nach den Coordinaten *unendlich klein erster Ordnung* wird, vorausgesetzt, dass die von Erregungspunkten erfüllten Gebiete *T ganz im Endlichen* liegen, und dass auch ϱ' nur im Endlichen von Null verschieden ist. Dies gilt nicht mehr für die Functionen, welche aus dem Ausdrucke (72) entstehen, wenn man k^2 durch $-k'^2$ ersetzt, unter k' eine reelle Constante verstanden; diese Functionen werden vielmehr im Unendlichen nebst ihren ersten Derivirten *unendlich gross.* Allerdings giebt es im Falle eines negativen k^2 auch einen im Gebiete T der Differentialgleichung $\Delta u - k'^2 u = -4\pi\varrho$, ausserhalb desselben der Differentialgleichung $\Delta u - k'^2 u = 0$ genügenden Ausdruck, nämlich $\iiint\limits_{(T)} \varrho \frac{e^{-k'r}}{r} dv$, welcher im Unendlichen mitsammt seinen Differentialquotienten unendlich klein wie $e^{-k'r}$ wird; dies ist aber nicht die allgemeinste Lösung jener Differentialgleichungen, da die letzteren ungeändert bleiben, wenn man zu u das über den ganzen Raum erstreckte Integral

$\iiint \varrho' \frac{e^{k'r} - e^{-k'r}}{k'r} dv$ hinzufügt, worin ϱ' eine willkürliche (jedoch gewissen Stetigkeitsbedingungen genügende) Function der Coordinaten bezeichnet.

Endlich ist noch die Eigenschaft des Integralausdruckes

$$\iiint_{(T)} \varrho \frac{\cos kr}{r} dv + \iiint \varrho' \frac{\sin kr}{kr} dv,$$

dass er an der Oberfläche des Raumgebietes T nebst seinen ersten Derivirten *stetig* ist, anzuführen, eine Eigenschaft, welche er mit dem Newton'schen Körperpotential theilt und welche auch ebenso, wie für letzteres, zu beweisen ist unter Benutzung des Umstandes, dass für sehr kleine Werthe r bis auf Grössen zweiter Ordnung $\frac{\cos kr}{r} = \frac{1}{r}$, $\frac{\sin kr}{kr} = 1$ ist. (Von der Oberfläche des Bereiches T setzen wir immer voraus, dass sie überall endliche Krümmung besitzt, da sonst besondere Untersuchungen nothwendig werden.)

Für solche Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ im Raume, welche nach *v. Helmholtz* als *Geschwindigkeitspotentiale einer Oberflächenbelegung von Erregungspunkten* zu bezeichnen wären und also durch einen Ausdruck von der Form

$$(74) \qquad u = \iint_{(F)} \sigma \frac{\cos kr}{r} do + \iiint \varrho \frac{\sin kr}{kr} dv$$

dargestellt werden, besteht die charakteristische Eigenschaft, dass beim Durchgang durch die Fläche F, über welche das erste Integral erstreckt ist, u selbst zwar sich stetig ändert, sein Differentialquotient nach der Normale von F aber *unstetig* und zwar so, dass die Relation

$$(74') \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = -4\pi\sigma$$

besteht, worin $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a$, $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i$ die Werthe von $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf der äusseren und inneren Seite der Fläche (unter der äusseren Seite diejenige verstanden, nach welcher hin n gerichtet ist) bezeichnen. Dieser Satz ergiebt sich, wie die früheren, welche für die Lö-

sungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ und die Newton'schen Potentiale übereinstimmend gelten, mit Hülfe der Zerlegung von $\frac{\cos kr}{r}$ in $\frac{1}{r} + f(r)$, wo die Function $f(r) = \frac{\cos kr - 1}{r}$ für $r = 0$ *verschwindet.* Letzteres hat dann zur Folge, dass $\frac{\partial}{\partial n}\iint\limits_{(F)} \sigma f(r) do$ beim Durchgang durch die Fläche F sich *stetig* ändert, und dass also $\frac{\partial}{\partial n}\iint\limits_{(F)} \sigma \frac{\cos kr}{r} do$ denselben Sprung erleidet, wie die nach n genommene Derivirte des Newton'schen *Flächenpotentials* $\iint \sigma \frac{do}{r}$. Dasselbe gilt aber von dem Ausdruck (74), weil das darin enthaltene Raumintegral nebst seinen ersten Ableitungen im ganzen Raume stetig ist.

Auf ähnliche Weise liesse sich zeigen, dass die der Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügenden Ausdrücke, welche auf Flächen stetig vertheilte Unstetigkeitspunkte unendlich kleiner Intensität von der *zweiten* Ordnung (Doppelquellen) mit zu jenen Flächen senkrechten Axen besitzen und demnach, abgesehen von willkürlichen überall stetigen Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$, durch über jene Flächen erstreckte Integrale $\iint \mu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) do$ gegeben sind, beim Durchgang durch eine jener Flächen denselben Sprung erleiden, wie das Potential einer Doppelbelegung vom „magnetischen Moment“ μ. (Zum Beweise braucht man nur $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos kr}{r}\right)$ in $\cos kr \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - k \frac{\sin kr}{r} \frac{\partial r}{\partial n}$ zu zerlegen und die entsprechenden Theile des Flächenintegrals für sich zu betrachten.) Das obige Integral liefert, wenn die belegte Fläche geschlossen ist, ausserhalb und innerhalb derselben zwei verschiedene Functionen u, dagegen wenn jene Fläche berandet ist, einen Zweig einer vieldeutigen Function u. — Beim Problem der Luftschwingungen lassen sich solche Flächen mit Doppelbelegungen als *transversal schwingende starre Flächen* deuten.

Durch die Formel (61) wird der Werth von u in einem beliebigen Raumpunkte durch die Summe eines Integrales $\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \frac{\cos k\bar{r}}{\bar{r}} do$, welches der Belegung einer geschlossenen Fläche mit einfachen Erregungspunkten, und eines anderen $-\frac{1}{4\pi}\int\int \bar{u} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos k\bar{r}}{\bar{r}}\right) do$, welches einer Belegung derselben Fläche mit Doppelquellen der oben angegebenen Art entspricht, ausgedrückt, und eine analoge Bedeutung hat die Formel (60) für die Lösungen u in der Ebene. Im IV. Theile erst werden wir sehen, wie man Darstellungen durch ein einer einfachen Oberflächenbelegung allein oder einer Doppelbelegung allein entsprechendes Integral gewinnen kann.

Ehe wir diesen Gegenstand verlassen, ist es vielleicht nützlich, als Beispiel einer einfachen Oberflächenbelegung den Fall einer *gleichmässig mit Erregungspunkten erfüllten Kugelfläche* zu behandeln, welcher recht geeignet ist, den Unterschied zwischen den Functionen u und dem Potential hervortreten zu lassen. — Die Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$, welche auf einer Kugelfläche vom Radius R gleichförmig vertheilten Erregungspunkten von der auf die Flächeneinheit bezogenen constanten Intensität σ entspricht, ist, wenn man die willkürliche durchaus stetige Function fortlässt,

$$u = 2\pi R^2 \sigma \int_0^\pi \frac{\cos kr'}{r'} \sin \vartheta d\vartheta,$$

wobei $r' = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\vartheta}$ ist und r jetzt die Entfernung des Punktes, für den u berechnet wird, vom Kugelmittelpunkt bezeichnet (während r' die Bedeutung des früheren r hat). Berücksichtigt man, dass $\frac{\sin\vartheta d\vartheta}{r'} = \frac{1}{rR}\frac{\partial r'}{\partial(\cos\vartheta)} \cdot d\cos\vartheta$ ist, so ergiebt sich

$$u = \frac{2\pi R\sigma}{kr}\Big[\sin kr'\Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi}.$$

Es ist nun zu unterscheiden, ob $r > R$ oder $< R$ ist; im ersten Fall erhält man

$$u = \frac{2\pi R\sigma}{kr} \cdot 2 \cos kr \sin kR,$$

im zweiten

$$u = \frac{2\pi R\sigma}{kr} \cdot 2 \sin kr \cos kR.$$

Wenn man noch $4\pi R^2\sigma = M$ setzt, so gilt also

für Punkte *ausserhalb* der Kugel: $u = M \frac{\sin kR}{kR} \cdot \frac{\cos kr}{r}$,

für Punkte *innerhalb* der Kugel: $u = M \frac{\cos kR}{R} \cdot \frac{\sin kr}{kr}$.

Der Werth von u ist also innerhalb der Kugel im Gegensatz zum Potential einer gleichförmig mit Masse belegten Kugelfläche *nicht* constant. Ferner ist u ausserhalb zwar mit einer solchen Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ identisch, welche nur im Kugelmittelpunkte einen singulären Punkt erster Ordnung besitzt (analog, wie das Potential einer Kugelschale auf äussere Punkte gleich dem Potential der im Kugelmittelpunkt concentrirten Gesammtmasse ist), aber die Intensität jenes im Mittelpunkte befindlichen Erregungspunktes ist $= M \frac{\sin kR}{kR}$, *hängt also vom Radius der Kugel ab* und *verschwindet* für alle diejenigen Werthe desselben, welche die Eigenthümlichkeit haben, dass k ein ausgezeichneter Werth für den Innenraum der Kugel bei der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ ist; hat R einen dieser durch $\sin kR = 0$ gegebenen Werthe, so ist also die betrachtete Lösung *u im ganzen Aussenraume identisch gleich Null,* welche Intensität auch die gleichförmige Belegung der Kugelfläche haben mag. Ebenso verschwindet u immer im ganzen *Innern* der Kugel, wenn R eine Wurzel der Gleichung $\cos kR = 0$ ist. — Ganz ähnlich werden sich diejenigen Lösungen u in der *Ebene* verhalten, welche einer gleichmässig mit einfachen Erregungspunkten belegten *Kreislinie* entsprechen; für den Fall eines *negativen* k^2 giebt *C. Neumann* im letzten Abschnitte seiner Theorie der Bessel-schen Functionen (Leipzig 1867) das darauf bezügliche Resultat an.

§ 6. Andeutungen zu weiterer functionentheoretischer Untersuchung der Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$.

So lange man nur solche der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügende Functionen betrachtet, welche im ganzen unbegrenzten Raume, in der ganzen Ebene oder auf einer ganzen geschlossenen Fläche eine directe *physikalische Bedeutung* haben sollen, kann man sich auf *eindeutige* Functionen beschränken, wie wir es hier meistens gethan haben, und hat es dann nur mit den im Vorhergehenden besprochenen Singularitäten zu thun. Denn bei allen im I. Theile angeführten physikalischen Problemen, welche auf die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und die verwandten Gleichungen führen, ist die Function u zufolge ihrer physikalischen Bedeutung (als *Verrückung* bei der schwingenden Membran, *Verdichtung* bei den Luftschwingungen, *Temperatur* bei den Wärmeleitungsproblemen) nothwendig *selbst eindeutig*, während bekanntlich bei vielen Problemen, wo die Potentialgleichung $\Delta V = 0$ auftritt, nur die *Differentialquotienten* von V eindeutig zu sein brauchen. — Lösungen unserer Differentialgleichung, welche, entsprechend ihrer physikalischen Bedeutung, nur für *begrenzte* Bereiche eindeutig erklärt sind, werden dagegen bei der analytischen Fortsetzung über diese Bereiche hinaus im Allgemeinen *nicht eindeutig* bleiben, was gelegentlich schon früher (S. 225) hervorgehoben wurde. Demnach sind nicht nur vom rein mathematischen Standpunkt, sondern auch für die physikalischen Anwendungen die *vieldeutigen* Functionen u von Wichtigkeit, und es wäre sehr wünschenswerth, dass die Eigenschaften dieser letzteren, ihre Verzweigungspunkte und singulären Punkte, ihr Verhalten auf Riemann'schen Flächen u. s. w. planmässig untersucht würden, kurz alle die functionentheoretischen Fragen, welche in der Theorie des Newton'schen und logarithmischen Potentials behandelt werden. Es würden sich dabei natürlich manche interessante Unterschiede ergeben; z. B. könnte man nicht, wie beim Potential, Functionen auf mehrfach zusammenhängenden Flächen construiren, welche

Periodicitätsmoduln besitzen, da die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ nicht erfüllt bleibt, wenn man zu u eine *Constante* hinzuaddirt; an Stelle der constanten Periodicitätsmoduln würden hier voraussichtlich überall endliche und eindeutige Lösungen der partiellen Differentialgleichung, nämlich die Normalfunctionen des betrachteten Gebietes, treten.

Aehnlich, wie wir im Vorhergehenden die in der ganzen Ebene oder im ganzen Raume eindeutigen Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ betrachtet haben, würden diejenigen Functionen u zu untersuchen sein, welche auf einer gegebenen geschlossenen *Riemann'schen Fläche* bezw. in einem analogen dreidimensionalen Gebiete eindeutig sind, und hierbei würden wieder die überall endlichen und stetigen Functionen, also die *ausgezeichneten Lösungen* des betrachteten geschlossenen Gebietes, besonderes Interesse darbieten. Auf diese Problemstellung werden wir am Ende des letzten (IV.) Theiles noch zurückkommen.

Endlich würde die weitere mathematische Untersuchung auch auf die *wesentlich* singulären Punkte und die *natürlichen Grenzen*, welche bei den der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügenden Functionen vorkommen können, auszudehnen sein. —

IV. Theil.

Bestimmung der Functionen u aus gegebenen Randwerthen und verwandten Bedingungen.

Vorbemerkung. In diesem letzten Theile unserer Darstellung werden wir uns vorwiegend mit der Aufgabe beschäftigen, *für gegebene Bereiche die Differentialgleichung* $\Delta u + k^2 u = 0$, *worin* k^2 *eine gegebene Constante ist, so zu integriren, dass die Lösung* u *innerhalb des gegebenen Bereiches überall eindeutig, endlich und (nebst ihren ersten Derivirten) stetig ist, und dass längs dessen Begrenzung entweder* u, *oder* $\frac{\partial u}{\partial n}$, *oder* $hu + \frac{\partial u}{\partial n}$ *(mit constantem* h*) vorgeschriebene Werthe annimmt.* Die hierauf bezüglichen Betrachtungen würden mit leicht erkennbaren Modificationen auf die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 f u = 0$ oder eine solche von der allgemeinsten in I, § 3 angegebenen Form übertragbar sein, in letzterem Falle allerdings unter der Voraussetzung, dass statt $hu + \frac{\partial u}{\partial n}$ *der in* II, § 1 und § 4 *angegebene lineare Ausdruck* $\alpha u + \gamma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_z \frac{\partial u}{\partial z}$ für die Begrenzung gegeben wird. Auf diese Verallgemeinerung des Problems soll aber nur insoweit besonders eingegangen werden, als bereits Arbeiten darüber vorhanden sind.

Wir werden im Folgenden die oben formulirten Probleme immer kurz als *Randwerthaufgaben* bezeichnen und zwar als *erste*, wenn die Werthe von $\bar{u}$, als *zweite*, wenn diejenigen von $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$, und als *dritte*, wenn die Werthe von $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ an der Begrenzung gegeben sind; dass wir diese Bezeichnung auch auf die räumlichen Probleme anwenden, wo man eigentlich

nicht von einem „Rande“ des Bereiches reden kann, dürfte im Interesse der Kürze wohl zu rechtfertigen sein.

§ 1. Physikalisches Vorkommen der Randwerthaufgaben.

Wie überhaupt in der vorliegenden Abhandlung, so werden wir uns insbesondere in diesem letzten Theile, über dessen Gegenstand bisher erst wenige zu sicheren Resultaten führende mathematische Arbeiten existiren, von der *physikalischen Erfahrung*, bezw. der *physikalischen Evidenz* gewisser Sätze leiten lassen. Es ist daher nothwendig, dass wir uns zunächst diejenigen physikalischen Probleme vergegenwärtigen, welche auf die Randwerthaufgaben führen. Die anschaulichsten derselben sind die *Probleme der erzwungenen Schwingungen*, bei welchen das k^2 der Differentialgleichung durch die Periode der die Schwingung unterhaltenden Kräfte gegeben ist. —

I. Die *erste Randwerthaufgabe* tritt auf:

a) bei den *erzwungenen Schwingungen einer Membran*, deren Randpunkte durch äussere Kräfte in einer gegebenen, periodischen, transversalen Bewegung erhalten werden;

b) bei der Bestimmung des *Gleichgewichts einer gespannten Membran*, auf welche, nachdem ihren auf einer verticalen Cylinderfläche verschiebbaren Randpunkten irgend welche unendlich kleine verticale Verrückungen ertheilt worden sind, bis zu einem beliebig hoch über ihrer ursprünglichen horizontalen Gleichgewichtslage liegenden Niveau eine schwere Flüssigkeit gegossen ist (vergl. I, B, § 2, a);

c) sodann bei der *nichtstationären Wärmeleitung in einem Körper, dessen Oberfläche*, falls unter $\bar{u}(x, y, z)$ eine längs derselben gegebene Function verstanden wird, *nach dem Gesetze* $\bar{u}e^{-k^2a^2t}$ *erkaltet*, wofür ein selbst schlecht leitender, von einer frei ausstrahlenden, sehr gut leitenden Hülle von überwiegender Masse umgebener Körper ein specielles Beispiel (bei welchem $\bar{u}$ constant ist) darbietet. —

In allen diesen Fällen ist der gegebene Werth k^2 positiv. Bei *negativem* k^2 tritt die erste Randwerthaufgabe für zweidimensionale Bereiche auf:

d) bei der Bestimmung der *stationären Wärmeleitung in einer dünnen Platte*, deren Flächen frei ausstrahlen, während die Randpunkte durch Wärmezufuhr von aussen auf gegebenen constanten Temperaturen erhalten werden; ferner

e) beim Problem der *stationären Wärmeströmung in einem cylindrischen (oder prismatischen) Körper*, für dessen ebene (zur Mantelfläche senkrechte) Endflächen eine Bedingung von der Form $h\overline{V} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial n} = 0$, entsprechend entweder freier Ausstrahlung (h positiv, endlich), oder verhinderter Wärmeabgabe ($h = 0$) oder constant $= 0$ erhaltener Temperatur ($h = \infty$), besteht, während für die Mantelfläche die Werthe der gesuchten Lösung von $\Delta V = 0$, d. h. der Temperatur, gegeben sind. Bei dem letzteren Problem kommt man dadurch auf die Aufgabe der Integration von $\Delta u - k'^2 u = 0$ für den *Querschnitt* bei gegebenen Randwerthen $\bar{u}(s)$, dass man, falls die z-Axe parallel der Mantelfläche ist, $V = \sum^n u_n \cdot \cos k_n'(z - z_0)$ setzt, wo sich die Werthe von k_n' durch die erwähnten Bedingungen für die geraden Endflächen bestimmen, und dass man die für die Mantelfläche gegebene Function $\overline{V}$ in eine Reihe $\sum^n \bar{u}_n(s) \cos k_n'(z - z_0)$ entwickelt, worin $\bar{u}(s)$ dann eine bekannte Function der Bogenlänge s der Querschnitts-Randcurve ist. In ähnlicher Weise führen auch noch andere Potentialprobleme auf die Randwerthaufgaben für $\Delta u - k'^2 u = 0$, oder auch, wenn es sich nicht um cylindrische Körper, sondern um solche der in I, § 1, e bezeichneten Art überhaupt handelt, für die daselbst (S. 15) angegebene allgemeinere partielle Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Variabeln.

Ein *räumliches* Problem, bei dem eine der Randwerthaufgaben für Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u - k^{2\prime} u = 0$ aufträte, scheint in der Physik nicht vorzukommen. —

II. Die *zweite Randwerthaufgabe*, also die Aufgabe, eine eindeutige, endliche, stetige Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ aus den an der Begrenzung des Gebietes gegebenen Werthen von $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ zu bestimmen, liegt beispielsweise vor:

a) wenn diejenigen *erzwungenen Schwingungen der in einem geschlossenen Raume enthaltenen Luftmasse* ermittelt werden sollen, welche durch eine gegebene periodische Bewegung der begrenzenden starren Fläche, bezw. im Falle einer Luftplatte des Randes, erzeugt werden; denn durch die Bewegung der Wand ist die Normalcomponente der Geschwindigkeit der anliegenden Luftheilchen, also auch $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ vorgeschrieben;

b) für ebene Bereiche beim Problem derjenigen *unendlich kleinen Schwingungen einer schweren Flüssigkeit in einem cylindrischen Gefäss*, welche durch gegebene transversale Schwingungen der cylindrischen Wand hervorgerufen werden.

c) Bei einer Membran müsste man die Neigungen der Randelemente gegen die Ebene des Randes als gegeben annehmen und zwar als periodische Functionen der Zeit beim Schwingungsproblem, als constant bei dem oben unter I, b erwähnten statischen Problem.

III. Für die *dritte Randwerthaufgabe* gestatten nur die Wärmeprobleme eine einfache anschauliche physikalische Deutung.

a) Bei der *nichtstationären Wärmeleitung* in einem beliebigen Körper würde dieselbe auftreten, wenn der Körper, wie unter I, c erläutert, von einem nach dem Newton'schen Gesetze erkaltenden Medium umgeben ist, wenn aber seine Oberfläche nicht jederzeit die Temperatur des letzteren besitzt, sondern durch sie hindurch ein Wärmeaustausch durch „äussere Leitung“ oder Strahlung stattfindet; dann muss nämlich, falls $Ue^{-a^2k^2t}$ die Temperatur des umgebenden Mediums ist, diejenige in dem betrachteten Körper ebenfalls durch einen Ausdruck $ue^{-a^2k^2t}$ dargestellt sein, und an der Grenzfläche die Beziehung $h(\bar{u}-\bar{U})+\frac{\partial(\bar{u}-\bar{U})}{\partial n}=0$ bestehen, so dass in der That $h\bar{u}+\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ einer gegebenen Function gleich sein muss.

b) Bei dem Problem der *stationären Wärmeströmung in einem cylindrischen Körper*, für dessen Endfläche eine Bedin-

gung von der Form $\alpha \overline{V} + \beta \frac{\partial \overline{V}}{\partial n} = 0$ gilt, liegt die dritte Randwerthaufgabe vor, wenn für das die Mantelfläche umgebende Mittel eine zeitlich constante Temperaturvertheilung U gegeben ist, und an der Mantelfläche wiederum ein Wärmeaustausch durch äussere Leitung oder Strahlung stattfindet;

c) ebenso ist es bei der *stationären Wärmeleitung in einer ausstrahlenden dünnen Platte*, für deren Rand analoge Verhältnisse wie die eben bezeichneten gelten, nur ist in diesem Falle der gegebene Werth k^2 *negativ*. —

Vom physikalischen Standpunkte aus wird Niemand daran zweifeln, dass die genannten Probleme im Allgemeinen *eine ganz bestimmte Lösung besitzen*, und wir schliessen daraus, dass dies auch von den mathematischen Randwerthaufgaben gilt, wofür natürlich nichts destoweniger ein mathematischer Beweis noch erbracht werden müsste. — Nur wenn k^2 ein *ausgezeichneter* Werth des gegebenen Bereiches ist, ergiebt eine physikalische Ueberlegung (nämlich bei den Schwingungsproblemen die, dass die Eigenschwingungen nicht unendlich verstärkt werden dürfen) die Nothwendigkeit einer *Bedingung für die gegebenen Randwerthe*, worauf wir später ausführlich eingehen werden.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass den Randwerthaufgaben bei *eindimensionalen* Gebieten die Aufgabe entspricht, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für $u(x)$ so zu integriren, dass an den Endpunkten des Gebietes u oder $\frac{du}{dx}$ oder $hu + \frac{du}{\partial x}$ gegebene Werthe hat, so dass sich also hier die Aufgabe auf eine *Bestimmung der Integrationsconstanten* reducirt. Bekannte physikalische Beispiele sind die durch periodische Bewegung der Enden erzwungene Schwingung einer Saite und die stationäre Wärmeleitung in einem ausstrahlenden Stabe, dessen Endflächen an ein Medium von gegebener Temperatur grenzen; das erstere ist geeignet, um sich im einfachsten Falle die Beschränkungen klar zu machen, welchen die Grenzbedingungen zu unterwerfen sind, falls k^2 ein ausgezeichneter Werth ist, also die Periode

der Bewegung der Endpunkte mit derjenigen einer freien Schwingung übereinstimmt.

Endlich sei bemerkt, dass die Randwerthaufgaben für die Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u + 4\pi\varrho(x, y, z) = 0$$

und ähnlicher, deren physikalische Bedeutung übrigens nach dem Vorhergehenden und den Ausführungen in III, § 5 leicht ersichtlich ist, nichts wesentlich Neues gegenüber den Randwerthaufgaben für die Lösungen der entsprechenden Differentialgleichungen *ohne* das Glied, welches eine gegebene Function der unabhängigen Variabeln ist, darbieten; denn man hat nur die Randwerthaufgaben für diese letzteren zu lösen und dasjenige Integral der urprünglichen nicht homogenen Gleichung hinzuzufügen, welches längs der Begrenzung verschwindet oder der Bedingung $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ oder $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ genügt, je nachdem es sich um die erste, zweite oder dritte Randwerthaufgabe handelt. —

§ 2. Excurs über die Randwerthaufgaben in der Potentialtheorie.

Um späterhin den Vergleich mit der Potentialtheorie zu erleichtern und den Weg, welcher im § 4 zur Lösung der Randwerthaufgaben für die der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügenden Functionen angedeutet werden wird, durch die Analogie mit den Methoden in der Potentialtheorie zu begründen, ist es wohl zweckmässig, eine Uebersicht über die Behandlungsweisen der Randwerthaufgaben in der *Potentialtheorie* vorauszuschicken.

a. *Dirichlet'sches Princip. Eindeutigkeitsbeweis.*

Die fundamentale Aufgabe der Potentialtheorie, eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ für einen gegebenen ebenen oder räumlichen Bereich so zu bestimmen, dass sie im Innern desselben nebst ihren ersten Derivirten überall endlich und stetig ist und längs dessen Begrenzung vorgeschriebene Werthe annimmt, d. i. also die *erste Randwerth-*

aufgabe, hat die Mathematiker und Physiker bekanntlich seit langer Zeit in hervorragendem Maasse beschäftigt. Zuerst suchte man nur die *Existenz* einer solchen Lösung ganz allgemein zu beweisen und bediente sich dabei jener Schlussweise, welche durch *Riemann* die Bezeichnung „*Dirichlet'sches Princip*" erhalten hat*) und unter diesem Namen jedenfalls in deutschen mathematischen Kreisen allgemein bekannt ist. Der Grundgedanke des Dirichlet'schen Princips, nämlich die Existenz einer Function daraus zu erschliessen, dass ein gewisses Integral mit lauter positiven Elementen ein *Minimum* besitzen müsse, findet sich u. a. bereits bei *Green* in seiner Abhandlung „On the Attraction of Ellipsoids"**), angewendet auf die Lösungen einer allgemeineren partiellen Differentialgleichung (für Potentiale im Raume von s Dimensionen), sodann bei *Sir W. Thomson*, welcher jene Schlussweise auf Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha^2 \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha^2 \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha^2 \frac{\partial V}{\partial z}\right) = -4\pi\varrho$$

sowie auf Potentiale anwendet, welche *ausserhalb* einer geschlossenen Fläche die Stetigkeitseigenschaften und auf derselben *gegebene Werthe von* $\frac{\partial \overline{V}}{\partial n}$ besitzen sollen***).

Bekanntlich besteht das Dirichlet'sche Princip im Wesentlichen in folgender Erwägung: Die Variationsrechnung lehrt, dass nachstehende Beziehung gilt:

---

*) *Riemann,* Bestimmung einer Function einer veränderlichen complexen Grösse durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. Crelle's Journal **54**, p. 111. 1857. — *Riemann* hat obige Bezeichnung gebraucht, weil er das Princip in den Vorlesungen *Dirichlet's* kennen gelernt hatte. Wie letzterer dasselbe angewendet hat, ist aus der *Grube'*schen Ausgabe der Vorlesungen *Dirichlet's* „über die im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Kräfte" (Leipzig 1876), p. 127—129, ersichtlich.

**) Transactions of the Cambridge Phil. Soc., 1835; *Green's* Math. Papers p. 192—194.

***) Cambridge and Dublin Math. Journal 1848 und Liouville's Journ. 1847. — Auf die *erste* Randwerthaufgabe hat *Thomson* das Dirichlet'sche Princip angewendet im Appendix A (p. 167—171) der Natural Philosophy.

$$\delta \int\int\int \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right\} dv$$
$$= -2 \int\int\int \Delta V \delta V dv + 2 \int\int \delta \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} do;$$

soll also das auf der linken Seite stehende Integral ein Minimum sein, während die Werthe von $\bar{V}$ an der Oberfläche des betrachteten Bereiches gegeben, mithin die Variationen $\delta \bar{V}$ daselbst gleich Null sind, so muss die Function V der partiellen Differentialgleichung $\Delta V = 0$ genügen. Da nun das Integral $\int\int\int \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right\} dv$ lauter positive Elemente hat, so muss es einen bestimmten endlichen Minimumwerth besitzen; folglich *giebt es* eine Function V, welche im betrachteten Bereiche der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ genügt und an der Begrenzung gegebene Werthe annimmt. — In analoger Weise würde man die Existenz einer Lösung der *zweiten* bezw. *dritten* Randwerthaufgabe daraus erschliessen, dass das Integral $\int\int\int \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right\} dv$ auch ein bestimmtes Minimum annehmen muss, wenn V der *Nebenbedingung* genügt, dass

$$\int\int F V do \quad \text{bezw.} \quad \int\int (F V + V^2) do,$$

worin F eine längs der Begrenzung gegebene Function bezeichnet, einen *constanten Werth* besitzen soll; denn das Verschwinden der ersten Variation erfordert dann, dass für die Begrenzung

$$\lambda \bar{V} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} = -\frac{\lambda}{2} F$$

ist, wo λ eine als Lagrange'scher Multiplicator auftretende Constante bedeutet. — Natürlich würden ganz entsprechende Betrachtungen für Lösungen von $\Delta V = 0$ in der *Ebene* anzustellen sein (für welche sie von *Riemann* zu seinen Existenzbeweisen benutzt worden sind).

Auf dem Grundgedanken des Dirichlet'schen Princips beruht auch der von *Gauss* in seinen „allgemeinen Lehrsätzen in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des

Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte“ (Art. 30—33) gegebene Beweis für den Satz, dass man ein Potential von gegebenen Massen, welche ausserhalb eines geschlossenen Raumes liegen, für das Innere des letzteren durch dasjenige einer bestimmten Massenbelegung seiner Begrenzungsfläche ersetzen kann. Die Lösbarkeit dieser Aufgabe, welche mit der ersten Randwerthaufgabe im Grunde identisch ist, erschloss *Gauss* nämlich daraus, dass das über die geschlossene Begrenzungsfläche jenes Raumes erstreckte Integral $\iint (V - 2U) m do$, worin U eine längs der Fläche gegebene Function, m die Dichtigkeit der gesuchten Oberflächenbelegung und V deren Potential bedeutet, ein Minimum besitzen müsse.

In neuerer Zeit hat man (auf Grund von Bemerkungen, welche zuerst von *Weierstrass* gemacht worden sind und die allgemeinen Grundlagen der Variationsrechnung betreffen) erkannt, dass das Dirichlet'sche Princip *als Existenzbeweis nicht stichhaltig ist**), und dass der einzige zulässige Existenzbeweis eine *Methode zur wirklichen Herstellung der Lösung* ist**). Solche Methoden, welche bei gewissen Beschränkungen in Betreff der Begrenzung des Bereiches und der gegebenen Randwerthe in diesem Sinne anwendbar sind, werden weiter unten Erwähnung finden.

Richtig ist demnach nur die *Umkehrung* des Dirichletschen Princips, nämlich der Satz, dass für eine nebst ihren ersten Ableitungen innerhalb eines gegebenen Bereiches endliche und stetige, der partiellen Differentialgleichung $\Delta V = 0$ genügende Function das über jenen Bereich erstreckte Integral $\iiint \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right\} dv$ ein *Minimum* wird, und zwar ein *absolutes* Minimum, wenn die Randwerthe von V, ein relatives für die Nebenbedingung $\iint (F\bar{V} + \bar{V}^2) do$

*) Vergl. die Literaturangaben in *Bacharach*'s „Geschichte der Potentialtheorie“.

**) Vergl. *C. Neumann*, Untersuchungen über das Newton'sche und logarithmische Potential, p. 35—42 und 101—107.

$=$ Const., wenn die Randwerthe einer linearen Verbindung von V und $\frac{\partial V}{\partial n}$ gegeben sind. Ferner bleibt der (zuerst wohl ebenfalls von *W. Thomson* geführte) Beweis der *Eindeutigkeit* der Randwerthaufgaben bestehen, welcher auf folgender Ueberlegung beruht. Ist V eine den Stetigkeitseigenschaften und der Gleichung $\Delta V = 0$ innerhalb eines bestimmten Bereiches (der sich auch ins Unendliche erstrecken darf) genügende Function, so gilt nach dem Green'schen Satze:

$$\iiint \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right\} dv = + \iint \overline{V} \frac{\partial \overline{V}}{\partial n} do.$$

Angenommen nun, es gebe *zwei* solche Functionen V, welche *dieselben Randwerthe* $\overline{V}$ oder $\frac{\partial \overline{V}}{\partial n}$ oder $h\overline{V} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial n}$ besitzen, wobei h positiv sei, so wären für ihre *Differenz* V' jene Randwerthe gleich 0, folglich wäre die rechte Seite obiger Gleichung in den beiden ersten Fällen $= 0$, im dritten $= - \iint h\overline{V}^2 do$; beides ist unmöglich, so lange die beiden V verschieden angenommen werden, da die linke Seite dann sicher > 0 ist; folglich besitzen die Randwerthaufgaben *nur eine* Lösung, *wenn* sie überhaupt eine besitzen. Für die *dritte* Randwerthaufgabe, mit welcher sich bisher nur *Dini* beschäftigt zu haben scheint (vgl. § 12 des II. Theiles), gilt dieser Schluss *nur bei positivem* h; im Falle eines *negativen* h der Grenzbedingung kann es nämlich, wie wir schon früher sahen, in der That „*ausgezeichnete*" Lösungen der Differentialgleichung des Potentials geben, welche man, nachdem man sie mit willkürlichen Constanten multiplicirt hat, zu der einmal gefundenen Lösung der Randwerthaufgabe hinzufügen kann. Bei der *zweiten* Randwerthaufgabe kann man nur schliessen, dass V *bis auf eine additive Constante* bestimmt ist, entsprechend dem Vorhandensein der „ausgezeichneten" Lösung $V =$ Const.

b. *Methode der Green'schen Functionen.*

Durch die Einführung der Green'schen Functionen wird keine directe Lösungsmethode, sondern nur eine *Reduction*

der allgemeinen Randwerthaufgaben auf einfachere specielle erreicht. Ueber die Beweise für die Existenz der Green'schen Functionen gilt daher dasselbe, wie über die Existenzbeweise für die Lösungen der allgemeinen Randwerthaufgaben; ihre Existenz lässt sich aber durch physikalische Erwägungen besonders gut plausibel machen.

Unter der *Green'schen Function* eines Bereiches schlechthin versteht man in der Regel *diejenige eindeutige Potentialfunction, welche innerhalb jenes Bereiches in einem Punkte* x_0, y_0, z_0 *unendlich gross wird wie* $\frac{1}{r_0}$ *im Fall des Raumes, wie* $-\log r_0$ *im Fall der Ebene, welche sonst überall endlich und stetig ist und an der ganzen Begrenzung verschwindet.* Sie wurde von *Green* 1828 in dem „Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism“ eingeführt und seitdem unter verschiedenen Bezeichnungen vielfach angewendet (*C. Neumann* z. B. nennt obige Function erst nach Subtraction von $\frac{1}{r}$ Green'sche Function, *F. Neumann* nennt sie *charakteristische* Function für die elektrostatische Vertheilung). Wir werden die oben definirte Function die *erste* Green'sche Function nennen im Gegensatz zu den analogen Functionen, mit deren Hülfe sich die zweite und dritte Randwerthaufgabe lösen lassen, und sie mit $G_{xyz}^{x_0 y_0 z_0}$ bezeichnen. Dieselbe hat die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sich ihr Werth bei Vertauschung des Parameterpunktes x_0, y_0, z_0 mit dem Argumentpunkte x, y, z nicht ändert, ein Satz, der sich durch Anwendung der Green'schen Gleichung (59) auf die beiden Functionen $G_{xyz}^{x_0 y_0 z_0}$ und $G_{x_0 y_0 z_0}^{xyz}$ leicht beweisen lässt. — Dass die Bestimmung von G in der That auf einen speciellen Fall der ersten Randwerthaufgabe zurückkommt, geht daraus hervor, dass man G kennt, sobald diejenige im ganzen Bereiche endliche und stetige Potentialfunction gefunden ist, deren Randwerthe $-\frac{1}{r_0}$ bezw. $+\log r_0$ sind.

Physikalisch lässt sich die Function $G_{xyz}^{x_0 y_0 z_0}$ deuten als

das Potential eines in x_0, y_0, z_0 befindlichen elektrischen Massenpunktes $+1$ und der von ihm auf einer geschlossenen leitenden Fläche inducirten Belegung für denjenigen, von jener Fläche begrenzten Theil des Raumes, welcher den Punkt x_0, y_0, z_0 enthält; es kann dies sowohl der von jener Fläche umschlossene, als der ausserhalb liegende und sich ins Unendliche erstreckende Raum sein. Durch diese physikalische Bedeutung der Green'schen Function kann, wie auch *Green* selbst dargelegt hat, ihre *Existenz für einen beliebigen räumlichen Bereich* als sichergestellt gelten. Für *ebene* Bereiche könnte man zu diesem Zwecke die Function G als das Potential derjenigen stationären elektrischen Strömung auffassen, welche entsteht, wenn sich in einem Punkte x_0, y_0 die positive Elektrode befindet, und der ganze Rand des Gebietes (welcher aus sehr viel besser leitendem Materiale, als das Innere, bestehen möge) als negative Elektrode fungirt und auf dem Potential 0 erhalten wird. — Uebrigens ist die erste Green'sche Function für ebene Bereiche der reelle Theil derjenigen Function von $x + iy$, welche die conforme Abbildung des betreffenden Bereiches auf einen Parallelstreifen vermittelt, und ist daher für alle Bereiche bekannt, welche man auf einen Parallelstreifen oder, was auf dasselbe hinauskommt, auf einen Kreis conform abbilden kann.

Mit Hülfe der Green'schen Function G stellt sich nun die Lösung der ersten Randwerthaufgabe in der Form dar:

$$V(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\int\!\!\int \overline{V}\,\frac{\partial G^{x_0 y_0 z_0}_{x\,y\,z}}{\partial n}\,do \text{ für räumliche,}$$

$$V(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi}\int \overline{V}\,\frac{\partial G^{x_0 y_0}_{x\,y}}{\partial n}\,ds \text{ für ebene Bereiche,}$$

wie sich leicht mittelst des Green'schen Satzes ergiebt. Man kann die erstere Gleichung auch auf Räume anwenden, die sich *in's Unendliche erstrecken*, vorausgesetzt, dass sich V selbst im Unendlichen regulär verhält, d. h. unendlich klein wie $\frac{1}{r}$ wird; denn zu den im Endlichen liegenden Begrenzungsflächen eines solchen Raumes kann man eine Kugelfläche von unendlich

grossem Radius hinzunehmen, ohne einen neuen Beitrag zu dem Doppelintegral zu erhalten, weil in unendlicher Entfernung $\frac{\partial G}{\partial n}$ unendlich klein *zweiter* Ordnung wird.

Setzt man in der Formel

$$V(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\int\!\!\int \overline{V}\,\frac{\partial \overline{G}}{\partial n}\,do,$$

angewendet auf das Innere einer geschlossenen Fläche O, für V das Potential $\frac{1}{r}$ eines äusseren Massenpunktes 1, so zeigt sie, dass das Potential des Punktes x_0, y_0, z_0 auf den letzteren äquivalent ist dem Potentiale einer *Oberflächenbelegung* von der Dichte $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial G_{x\,y\,z}^{x_0 y_0 z_0}}{\partial n}$. Hieraus folgt, dass das Potential beliebiger in O eingeschlossener Massen für den Raum ausserhalb O ersetzt werden kann durch das Potential einer *einfachen Belegung* der Fläche O. Dasselbe gilt für Potentiale äusserer Massen im von O umschlossenen Raume (*Gauss*, Allgemeine Lehrsätze etc., Art. 36). Ein analoger Satz ergiebt sich natürlich für *ebene* Bereiche.

Die Behandlung der *zweiten Randwerthaufgabe* mittelst einer „Green'schen Function" hat zuerst *F. Neumann* gegeben*). Die von ihm eingeführte „charakteristische Function" U ist (im *Raume*) dadurch definirt, dass sie in *einem* Punkte des Bereiches unendlich gross wie $\frac{1}{r}$ wird und längs der ganzen Begrenzungsfläche einen *constanten* Differentialquotienten nach der Normale hat. Mittelst dieser Function U drückt sich ein überall endliches und stetiges Potential V durch die gegebenen Randwerthe von $\frac{\partial V}{\partial n}$ mittelst der Formel aus:

$$V = +\frac{1}{4\pi}\int\!\!\int \overline{U}\,\frac{\partial \overline{V}}{\partial n}\,do + \text{Const.},$$

ist also selbstverständlich *nur bis auf eine additive Con-*

*) Vorlesungen über das Potential, herausgegeben von *C. Neumann*, Leipzig 1887, Cap. XI, § 5. — Vgl. übrigens auch *Dini:* Sull' una funzione analoga a quella di Green. Atti d. Acc. d. Lincei (2), III, p. 129—137. 1878.

stante bestimmt. *F. Klein* hat in seiner Vorlesung über Potentialtheorie (II. Theil, Sommersemester 1888) die Lösung der zweiten Randwerthaufgabe übersichtlicher dargestellt mit Hülfe einer neuen Art von Green'scher Function (wir können sie die *zweite* Green'sche Function nennen) $\Gamma_{xyz}^{x_0 y_0 z_0; x_1 y_1 z_1}$, *welche an einer Stelle* x_0, y_0, z_0 *des Bereiches unendlich gross wird wie* $+\frac{1}{r_0}$, *an einer zweiten Stelle* x_1, y_1, z_1 *wie* $-\frac{1}{r_0}$ *und an der Begrenzungsfläche einen verschwindenden Differentialquotienten nach der Normale besitzt*; die letztere Eigenschaft kann man nur fordern, wenn man *zwei entgegengesetzte* „*Pole*“ (d. h. Unendlichkeitsstellen) einführt. Die Function Γ ist durch die angegebenen Eigenschaften (zu denen die Eindeutigkeit, Stetigkeit und Endlichkeit im ganzen Bereiche ausser in den „Polen“ hinzukommt) nur *bis auf eine additive Constante* bestimmt. Um sie vollständig zu definiren, müsste man etwa noch einen Punkt x', y', z' angeben, in welchem sie *verschwinden* soll; indessen ist dies für die hier beabsichtigte Verwendung der Function Γ weiter nicht erforderlich, weil die gegebenen Randwerthe von $\frac{\partial \overline{V}}{\partial n}$ bekanntlich der Bedingung $\int\int \frac{\partial \overline{V}}{\partial n} do = 0$ genügen müssen, damit die aus ihnen zu bestimmende Potentialfunction V im ganzen Bereiche überhaupt endlich und stetig sein kann, und weil daher eine in Γ enthaltene additive Constante den Werth des Integrals $\int\int \overline{\Gamma} \frac{\partial \overline{V}}{\partial n} do$ *nicht beeinflusst.* Nur im Interesse der Symmetrie empfiehlt es sich, den erwähnten Punkt x', y', z' einzuführen und als zweiten Argumentpunkt zu betrachten. Die Function

$$\Gamma_{xyz;\, x'y'z'}^{x_0 y_0 z_0;\, x_1 y_1 z_1}$$

besitzt dann die Eigenschaft, bei Vertauschung der beiden Argumentpunkte x, y, z und x', y', z' mit den beiden Parameterpunkten (Polen) x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 *ungeändert* zu bleiben. Dieses *Reciprocitätsgesetz der Function* Γ ist in ähnlicher Weise mittelst des Green'schen Satzes ableitbar, wie oben für das Reciprocitätsgesetz der Function G angedeutet wurde.

Die *Existenz* dieser zweiten Green'schen Function kann als sichergestellt gelten durch die unzweifelhafte physikalische Thatsache, *dass in einem leitenden Körper, welcher eine Zuleitungs- und eine Ableitungsstelle von gleicher Ergiebigkeit* (entsprechend den beiden Polen von Γ) *enthält, eine stationäre elektrische oder Wärmeströmung eintritt*; die Function Γ bedeutet nämlich das Potential bei der ersteren Strömung, die Temperatur bei der letzteren, falls der Körper von einer nichtleitenden, bezw. adiathermanen Hülle umgeben ist.

Die Lösung der zweiten Randwerthaufgabe, welche sich mit Hülfe der Function Γ durch Anwendung des Green'schen Satzes auf die Oberfläche des gegebenen Bereiches und zwei unendlich kleine, die Punkte x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 umschliessende Kugelflächen ergiebt, hat nun folgende Form:

$$V(x_0, y_0, z_0) = V(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{4\pi} \int\int \frac{\partial \overline{V}}{\partial n} \Gamma_{x y z;\, x' y' z'}^{x_0 y_0 z_0;\, x_1 y_1 z_1} \cdot do.$$

Man sieht daraus, dass in der That der Punkt x_1, y_1, z_1 dazu dient, die zunächst auftretende willkürliche Constante zu bestimmen.

Mittelst der Function Γ kann man das Potential beliebiger Massen für einen Raum, welcher letztere nicht enthält, durch das Potential einer *Doppelbelegung* einer jenen Raum umschliessenden Fläche ersetzen, analog wie es mittelst der *ersten* Green'schen Function durch das Potential einer *einfachen* Oberflächenbelegung ersetzt werden konnte.

Für *ebene* Bereiche lässt sich die zweite Randwerthaufgabe mit Hülfe einer der oben definirten ganz analogen Function Γ, welche aber in den beiden „Polen" *logarithmisch* unendlich gross wird, lösen*). Indessen kann man hier die

*) Die erste und zweite Green'sche Function ebener Bereiche lassen sich, wie *F. Klein* in seinen Beiträgen zur „Riemann'schen Functionentheorie", Math. Ann. 21, § 9 (1882) dargelegt hat, als Specialfälle von Potentialen auffassen, die auf *geschlossenen Flächen* überall eindeutig sind und zwei entgegengesetzte Pole bezw. zwei Paare von solchen besitzen; man hat zu diesem Zwecke nur den ebenen Bereich als aus zwei übereinander liegenden, am Rande zusammenhängenden Blättern bestehend zu betrachten. Die Function G besitzt dann ent-

zweite Randwerthaufgabe auch auf die erste zurückführen auf Grund der Eigenschaft des logarithmischen Potentials, der reelle Theil einer Function complexen Argumentes $V + iW$ zu sein; denn mit den Randwerthen von $\frac{\partial V}{\partial n}$ sind zugleich diejenigen von $\frac{\partial W}{\partial s}$, also bis auf eine additive Constante auch die von W selbst bekannt, welche letztere Function ja ebenfalls ein Potential ist.

Die *dritte Randwerthaufgabe* der Potentialtheorie, welche z. B. vorliegt, wenn die stationäre Wärmeströmung in einem leitenden Körper, in dessen Umgebung die Temperatur mit dem Ort variirt, ermittelt werden soll, könnte mit Hülfe einer *dritten Green'schen Function* $\mathfrak{G}$, welche an der Begrenzung des Bereiches der Bedingung $h\overline{\mathfrak{G}} + \frac{\partial \overline{\mathfrak{G}}}{\partial n} = 0$ zu genügen hätte, gelöst werden. Diese Behandlungsweise der dritten Randwerthaufgabe, welche in der Potentialtheorie noch nirgends durchgeführt sein dürfte, werden wir jedoch erst bei den der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügenden Functionen erörtern, wo sie mehr Interesse darbietet; die dort zu gebenden Entwickelungen können dann ja auch leicht für den Fall $k = 0$, also für die Potentialgleichung, specialisirt werden.

c. *Combinationsmethode von C. Neumann und H. A. Schwarz.*

Ist die Randwerthaufgabe (es handelt sich hier nur um die *erste*) für *specielle* Bereiche gelöst, so kann man mittelst der *„Combinationsmethode“* oder des *„Grenzübergangs durch*

---

gegengesetzte Pole in zwei correspondirenden Punkten der Vorder- und Rückseite, die Function Γ zwei gleiche positive Pole in einem Paare, zwei gleiche, jene ergänzende, negative in einem zweiten Paare solcher Punkte. Es tritt so auch hervor, dass die oben erwähnten Reciprocitätssätze der Functionen G und Γ in enger Beziehung stehen zur Vertauschbarkeit von Parameter und Argument bei den Abel'schen Integralen dritter Gattung. — Die *dritte* Green'sche Function eines ebenen Bereiches lässt sich *nicht* in ähnlicher Weise als Specialfall eines auf einer geschlossenen Fläche eindeutigen logarithmischen Potentials auffassen. —

alternirendes Verfahren", welche gleichzeitig (1870) von *C. Neumann* und *H. A. Schwarz* aufgefunden wurden*), die Lösung auch für solche Bereiche herstellen, welche aus jenen speciellen so zusammengesetzt sind, dass letztere theilweise übereinander greifen. —

Das Verfahren, welches *H. A. Schwarz* in den Berliner Monatsberichten von 1870, p. 780—84, für *ebene* Bereiche mitgetheilt hat**), ist im Wesentlichen folgendes:

T_1 und T_2 seien zwei Bereiche, für welche man die erste Randwerthaufgabe schon gelöst hat; dieselbe soll nun für einen Bereich gelöst werden, welcher aus T_1 und T_2 so zusammengesetzt ist, dass beide ein Stück T gemeinsam haben. Die äusseren Randcurven von T seien L_0 (T_1 angehörig) und L_3 (T_2 angehörig); das Stück der Begrenzung von T_1, welches innerhalb T_2 liegt, werde mit L_2, dasjenige der Begrenzung von T_2, welches in das Innere von T_1 fällt, mit L_1 bezeichnet. Längs L_0 und L_3 sind die Werthe $\overline{V}$, welche die Lösung von $\Delta V = 0$ daselbst annehmen soll, beliebig vorgegeben; ihre untere Grenze sei k, die obere g. — Man nehme nun zunächst längs L_2 die Werthe von V willkürlich, z. B. $= k$, an und integrire $\Delta V = 0$ dementsprechend für den Bereich T_1; die Lösung werde mit V_1 bezeichnet. Nun bestimme man diejenige Lösung für V_2, welche längs L_3 die gegebenen Randwerthe $\overline{V}$ hat und längs L_1 mit V_1 übereinstimmt. Darauf wird wieder eine Lösung V_3 von $\Delta V = 0$ so bestimmt, dass sie längs L_0 die Werthe $\overline{V}$, längs L_2 dieselben Werthe wie V_2 hat. So fortfahrend erhält man je eine unendliche Reihe von Potentialen mit ungeraden Indices, welche für T_1, und von solchen mit geraden Indices, welche für T_2 definirt sind, und welche alle längs L_0 und L_3 die vorgeschriebenen Werthe $\overline{V}$ annehmen. Die Functionen beider Reihen sind hiernach sämmtlich für das Gebiet T erklärt und stimmen auf dessen Begrenzungscurven abwechselnd überein,

*) Cf. Berichte der k. sächsischen Gesellschaft, Math.-phys. Classe, 1888, p. 122.

**) Vgl. auch *Schwarz'* gesammelte math. Abhandlungen II, p. 133 ff.

nämlich V_{2n-1} mit V_{2n} auf L_1, V_{2n+1} mit V_{2n} auf L_2. Es lässt sich nun zeigen, dass sich V_{2n} und V_{2n+1} bei unbegrenzt wachsendem n je einer bestimmten Grenzfunction nähern, dass nämlich die unendlichen Reihen

$$V' = V_1 + (V_3 - V_1) + (V_5 - V_3) + \cdots$$

und

$$V'' = V_2 + (V_4 - V_2) + (V_6 - V_4) + \cdots$$

unbedingt convergiren und in T_1 bezw. T_2 der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ genügen. Der Convergenzbeweis beruht auf folgendem, von *H. A. Schwarz* l. c. p. 780 abgeleiteten Hülfssatze: *Ist die Peripherie eines Bereiches T in Strecken von gerader und solche von ungerader Ordnungszahl getheilt, und eine Lösung V_1 von $\Delta V_1 = 0$ so bestimmt, dass sie auf den ersteren $= 0$, auf den letzteren dem absoluten Betrage nach $\leqq g_1$ ist, so ist längs solcher innerhalb T verlaufender Linien, welche mit den Randstrecken von ungerader Ordnungszahl höchstens die Endpunkte gemein haben, V_1 überall $\leqq qg_1$, wenn q einen echten Bruch bezeichnet.* Aus diesem Satze folgt nämlich, dass auf L_2 $(V_2 - V_1) < g - k < G$, längs L_1 $(V_3 - V_1) < Gq_1$, längs L_2 $(V_4 - V_2) < Gq_1q_2$ ist u. s. f., woraus sich die Convergenz obiger Reihen ergiebt.

Die Grenzfunctionen V', V'', welche beide für das Gebiet T definirt sind, stimmen nun nach dem oben Gesagten sowohl längs L_1, als längs L_2 überein; folglich sind sie in T überhaupt *identisch.* Hieraus folgt aber, dass V' und V'' auch im ganzen Gebiete eine und dieselbe, der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ genügende Function, welche längs L_0 und L_3 die Werthe $\overline{V}$ annimmt, darstellen, dass also das beschriebene Approximationsverfahren in der That die Lösung der ersten Randwerthaufgabe für den combinirten Bereich liefert. —

Da nun die Green'sche Function und somit die Lösung der ersten Randwerthaufgabe für solche ebene Bereiche angebbar ist, welche man auf die Fläche eines Kreises conform abbilden kann, und da letzteres immer für Flächenstücke von geeigneter Ausdehnung, welche einerseits an ein singularitätenfreies Stück einer analytischen Curve angrenzen, mög-

lich ist*), so ergiebt sich mittelst der combinatorischen Methode, *dass die erste Randwerthaufgabe für alle ebenen Bereiche, welche von einer endlichen Anzahl von singularitätenfreien, sich nicht berührenden Stücken analytischer Linien begrenzt werden, lösbar ist***).

Wir haben hier gerade dieses alternirende Verfahren von *H. A. Schwarz* angedeutet, weil sich an dasselbe gewisse später zu besprechende Untersuchungen *Picard's* über die Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ anschliessen. — Die Combinationsmethode von *C. Neumann* stimmt im Principe mit dem Verfahren von *Schwarz* überein; in seinen „Untersuchungen über das Newton'sche und logarithmische Potential“ p. 310—38 unterscheidet *C. Neumann* drei Fälle je nach der Lage der Randcurven der zu combinirenden Bereiche und des neuen Bereiches zu einander. Er hat die Combinationsmethode auch in gleicher Weise auf räumliche Bereiche angewendet, während sich *Schwarz* auf ebene Gebiete beschränkte. — Ob ähnliche combinatorische Methoden bei der *zweiten* Randwerthaufgabe zum Ziele führen würden, scheint bisher nicht untersucht worden zu sein. —

d. *Methode des arithmetischen Mittels von C. Neumann.*

Ein Verfahren, welches die Lösung der ersten Randwerthaufgabe *direct* für gewisse sehr allgemeine, ebene oder räumliche Bereiche liefert, ist die von *C. Neumann* herrührende *Methode des arithmetischen Mittels****). Dieselbe beruht darauf,

*) Ein Beweis für noch allgemeinere Bereiche ist gegeben von *H. A. Schwarz*, Zur Theorie der Abbildung, ges. math. Abhandlungen II. p. 108. — Vergl. auch *A. Harnack*, Grundlagen zur Theorie des log. Potentials etc. (Leipzig 1889) § 39.

**) *H. A. Schwarz*, Berliner Berichte 1870, p. 784. — Ueber die functionentheoretische Bedeutung der Combinationsmethode vergleiche man *C. Neumann's* „Vorl. über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale“ (2. Aufl., Leipzig 1884) nnd die beiden ersten Capitel des 3. Abschnittes im I. Bande der „Vorl. über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen“ von *F. Klein* (ausgearbeitet von *R. Fricke*, Leipzig 1890).

***) Zuerst mitgetheilt in den Berichten der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 21. April und 31. October 1870, dann ausführlich im Cap. V der

dass die Elemente der Begrenzung durch solche der Tangente bezw. Tangentialebene ersetzt werden, und dementsprechend ein Potential für das Innere des Bereiches nach den bekannten Formeln für die Halbebene bezw. den Halbraum berechnet wird, welches zunächst noch nicht die verlangten Randwerthe hat, aber durch Hinzufügung einer unendlichen Reihe von auf analoge Weise berechneten Potentialen so corrigirt werden kann, dass sich die Randwerthe von den vorgeschriebenen Werthen nur um eine bestimmte Constante unterscheiden. Die einzige Voraussetzung, welche dabei *C. Neumann* in Bezug auf die Begrenzung macht, ist, abgesehen von der Ausschliessung gewisser Singularitäten, diejenige, dass die begrenzende Curve bezw. Fläche überall *nach aussen convex* sein, d. h. von keiner ihrer Tangenten bezw. Tangentialebenen geschnitten werden soll.

Im Folgenden soll die Methode für *ebene* Bereiche kurz auseinandergesetzt werden. Die ganz analoge Entwickelung für räumliche Bereiche nebst allen Convergenzbeweisen, auf die wir hier nicht eingehen, ist ausführlich in Cap. V des schon citirten Buches von *C. Neumann* durchgeführt. Es sei gleich bemerkt, dass man das Verfahren ebensogut, wie auf das Innere, auch auf das Aeussere einer geschlossenen Curve bezw. Fläche anwenden kann.

Die mittelst der Green'schen Function gewonnene Lösung der ersten Randwerthaufgabe für die *Halbebene* lautet bekanntlich:

$$V(x, y) = \frac{-1}{\pi} \int \overline{V} \, \frac{\cos \psi}{r} \, ds,$$

wo ds ein Element der begrenzenden Geraden, r die Verbindungslinie seines Mittelpunktes mit dem Punkte x, y, und ψ den Winkel zwischen r und der äusseren Normale bezeichnet, welcher bei einem convexen Bereich stets ein stumpfer ist.

„Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential" (Leipzig 1877). Ferner beziehen sich auf die Methode des arithmetischen Mittels mehrere neuere Abhandlungen *C. Neumann's* in den Abhandlungen d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., Math.-phys. Classe, Bd. **13**, 1887 und **14**, 1888.

$V(x, y)$ ist also als das Potential einer Doppelbelegung des Randes mit dem (auf die Längeneinheit bezogenen) Moment $\frac{\overline{V}}{\pi}$ dargestellt. Da $\frac{-\cos\psi}{r}\, ds$ der Gesichtswinkel $d\varphi$ ist, unter welchem das Randelement ds vom Punkte x, y aus erscheint, und da π gleich dem über die ganze Begrenzungslinie erstreckten Integrale $\int d\varphi$ ist, so kann $V(x, y)$ auch in gewissem Sinne als das *arithmetische Mittel* aus den Randwerthen $\overline{V}$ angesehen werden, indem man schreibt

$$V(x, y) = \frac{\int \overline{V} d\varphi}{\int d\varphi}.$$

Soll nun $\Delta V = 0$ für einen durch eine beliebige, aber überall convexe, geschlossene Curve begrenzten Bereich so integrirt werden, dass die Lösung V im Innern endlich und stetig ist und auf dem Rande gegebene Werthe $\overline{V}$ annimmt, so bildet man nach *C. Neumann* gemäss der oben angegebenen Regel zunächst das Potential

$$V_1(x, y) = -\int \frac{\overline{V}}{\pi} \frac{\cos\psi}{r}\, ds.$$

Um zu untersuchen, welchen Werth dasselbe annimmt, wenn der Punkt x, y auf die Begrenzung rückt, zerlege man das Integral in einen Theil über dasjenige Begrenzungselement ds, dessen Mittelpunkte sich x, y nähern soll, und in einen über die ganze übrige Begrenzung zu erstreckenden Theil. Der erste Theil ist das Potential, welches sich für die *Halbebene*, die von der, an der betrachteten Stelle ds an die Begrenzungscurve gelegten Tangente begrenzt wird, ergeben würde, wenn auf jenem Elemente ds der Randwerth $\overline{V}$, sonst auf der ganzen Tangente $V = 0$ gegeben wäre; folglich nimmt er den Werth $\overline{V}$ an, wenn x, y auf ds rückt. In dem zweiten Theile des Integrales kann man von vornherein x, y auf ds annehmen und dann die Integrationsgrenzen von beiden Seiten zusammenrücken lassen; der so erhaltene Werth sei U_1 (er würde

$= 0$ sein, wenn der gegebene Bereich wirklich die erwähnte Halbebene wäre). Die Randwerthe von V_1 sind demnach

$$\overline{V} + U_1,$$

also um U_1 von den verlangten verschieden.

Aus diesen neuen Randwerthen U_1 bilde man ebenso, wie zuerst aus $\overline{V}$, ein Potential

$$V_2 = \int \frac{-U_1}{\pi} \frac{\cos \psi}{r} ds;$$

dasselbe hat am Rande den Werth $U_1 + U_2$, wo U_2 wieder denjenigen Werth des Integrals bezeichnet, welchen man erhält, wenn man schon *vor* der Integration x, y auf dem Rande festlegt. So fortfahrend berechne man eine unendliche Reihe von Potentialen $V_1, V_2 \ldots V_n \ldots$ und Randwerthen $U_1, U_2 \ldots U_n \ldots$. Dann wird, wie *Neumann* zeigt, für $n = \infty$

$$\lim U_n = C;$$

die Randwerthe $U_1, U_2 \ldots$, welche man auch in der Form darstellen kann

$$U_1 = \frac{\int \overline{V} d\varphi}{\int d\varphi}, \quad U_2 = \frac{\int U_1 d\varphi}{\int d\varphi}, \ldots$$

gleichen sich nämlich immer mehr aus und nähern sich einer Constante C, dem (eigentlichen) *arithmetischen Mittel aus den gegebenen Werthen* $\overline{V}$, als Grenzwerth.

Stellt man nun die Hülfspotentiale her

$$W_1 = -\int \frac{\overline{V} - C}{\pi} \cdot \frac{\cos \psi}{r} ds, \quad W_2 = -\int \frac{U_1 - C}{\pi} \cdot \frac{\cos \psi}{r} ds$$

u. s. w.,

so sind dieselben im Innern des Bereiches bezw. $= V_1 - 2C$, $V_2 - 2C, \ldots$ und nehmen am Rande die Werthe an

$$\overline{V} + U_1 - 2C, \quad U_1 + U_2 - 2C, \ldots$$

Die Reihe

$$C + W_1 - W_2 + W_3 \cdots + (-1)^{n+1} W_n$$

hat daher am Rande den Werth:

$$C + (\bar{V} - C) + (U_1 - C) - (U_1 - C) - (U_2 - C) + \cdots$$
$$+ (-1)^{n+1}(U_{n-1} - C) + (-1)^{n+1}(U_n - C)$$
$$= \bar{V} + (-1)^{n+1}(U_n - C).$$

Für unendlich grosses n convergiren die Potentiale W_n gegen 0 und U_n gegen C; die unendliche Reihe

$$C + W_1 - W_2 + W_3 - \cdots,$$

von welcher *Neumann* des Weiteren noch nachweist, dass sie bei convexer Begrenzung convergirt und der Differentialgleichung des Potentials genügt, nimmt daher am Rande die vorgeschriebenen Werthe $\bar{V}$ an und stellt somit die Lösung der ersten Randwerthaufgabe dar. —

Wenngleich bei der directen Anwendung der *Neumann*schen Methode des arithmetischen Mittels eine durchaus nach aussen convexe Begrenzung des Bereiches vorausgesetzt werden muss, so gestattet dieselbe doch in Verbindung mit der Combinationsmethode die Lösung der ersten Randwerthaufgabe für beliebig gestaltete Bereiche, wie u. A. *F. Klein* in seinen Vorlesungen hervorgehoben hat. Es soll dies hier für dreidimensionale Bereiche erörtert werden, da im Fall der Ebene die Verhältnisse noch einfacher liegen. Zunächst ist leicht einzusehen, dass man ein beliebiges concaves oder sattelförmiges Stück der Begrenzungsfläche, sofern man es nur hinreichend klein wählt, durch *Inversion* in ein nach Aussen *convexes* Flächenstück verwandeln kann; man braucht dazu nur das Inversionscentrum genügend nahe an jenem Flächentheile anzunehmen. Demnach kann man den gegebenen Bereich ganz mit übereinander greifenden Theilbereichen (T_h) von der Art ausfüllen, dass jeder von ihnen sich durch Inversion in einen Bereich (T_h') mit durchaus convexer Begrenzung überführen lässt. (Als Grenzflächen der Theilbereiche im Innern des ursprünglichen Bereiches kann man etwa Kugelflächen wählen.) Da man nun für den Bereich T_h' die erste Randwerthaufgabe nach der Methode des arithmetischen Mittels lösen kann, und da nach dem in III, § 2 abgeleiteten *Thomson*-

schen Satze bei der Inversion ein Potential $V(x, y, z)$ in eine Function übergeht, die mit $\frac{1}{r}$ (dem reciproken Abstande vom Inversionscentrum) multiplicirt wieder ein Potential ist, so ist die Lösung der Randwerthaufgabe auch für den Bereich T_h möglich; will man nämlich auf der Begrenzung von T_h die Werthe $\overline{U}$ erhalten, so muss man in den correspondirenden Punkten der Grenzfläche von T_h' die Werthe $\bar{r}\,\overline{U}$ vorschreiben. Schliesslich gestattet dann die im vorigen Abschnitte besprochene Combinationsmethode, die verlangte Lösung für den ganzen ursprünglichen Bereich herzustellen.

Bei ebenen Bereichen würde ein ganz analoges Verfahren zum Ziele führen.

Nach dem Vorstehenden kann man sagen, dass die erste Randwerthaufgabe der Potentialtheorie für alle räumlichen und ebenen Bereiche lösbar ist, deren Begrenzung keine Singularitäten besitzt. Im Falle, dass auf der letzteren singuläre Punkte vorhanden sind, sind besondere Untersuchungen erforderlich, wie solche schon von *C. Neumann* in dem citirten Buche begonnen worden sind.

Neuerdings ist von *Poincaré* in seiner schon erwähnten Arbeit ein Verfahren zur Lösung der ersten Randwerthaufgabe für räumliche Bereiche angegeben worden, bei welchem ebenfalls die bekannte Green'sche Function der Kugel benutzt wird, welches sich aber von der verallgemeinerten Methode des arithmetischen Mittels wesentlich dadurch unterscheidet, dass man nicht die Randwerthe einer auf bestimmte Weise gebildeten Lösung von $\Delta V = 0$ successive corrigirt, bis sie in die gegebenen übergehen, sondern von einer Function ausgeht, welche bereits die vorgeschriebenen Randwerthe besitzt, aber nicht der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ genügt, und durch ein Approximationsverfahren den zweiten Differentialparameter jener Function successive im ganzen Bereiche zum Verschwinden bringt, so dass man also *bei festgehaltenen Randwerthen die Differentialgleichung approximirt. Poincaré* setzt also voraus, es könne eine Function V_0 gefunden werden, welche in dem gegebenen Bereiche, etwa ausser-

halb einer geschlossenen Fläche F, den gewöhnlichen Stetigkeitsbedingungen genügt und auf F die gegebenen Werthe $\overline{V}$ besitzt, sonst aber ganz beliebig sein mag. Der zweite Differentialparameter dieser Function V_0 kann als überall negativ vorausgesetzt werden, da man andernfalls V_0 so in zwei gesondert zu behandelnde Theile $V_0' + V_0''$ zerlegen kann, dass $\Delta V_0'$ überall > 0, $\Delta V_0''$ überall < 0 ist. Ist also $\Delta V_0 = - 4\pi \varrho_0$, unter ϱ_0 eine im ganzen Gebiete positive Ortsfunction verstanden, so kann V_0 als das Newton'sche Potential einer *Massenvertheilung von der Dichte* ϱ_0 angesehen werden. *Das Poincaré'sche Verfahren besteht nun darin, dass diese Massen aus dem ganzen Raume theils auf die Grenzfläche F, theils in's Unendliche geschafft werden, und zwar ohne dass sich dabei die Werthe des Potentials auf F ändern.* Die Möglichkeit, dies successive zu erreichen, beruht darauf, dass man den betrachteten Raum mit unendlich vielen *Kugeln* ausfüllen kann, für welche die analoge Aufgabe mit Hülfe der bekannten Green'schen Function lösbar ist, und zwar ist die Convergenz des Verfahrens dadurch gesichert, dass bei der Ersetzung der in einer Kugel K enthaltenen Masse durch die äquivalente Oberflächenbelegung von K das Potential im Aussenraume unverändert bleibt, innerhalb K aber *verkleinert* wird, und dass andererseits, weil nur positive Massen vorhanden sind, das Potential immer *positiv* bleibt. — Die vorstehend angedeutete *Poincaré*'sche Methode ist mit leicht erkennbaren Modificationen auch auf *ebene* Bereiche anwendbar und im Uebrigen dadurch der Verallgemeinerung fähig, dass man statt der Kugel irgend welche andere Bereiche benutzt, für welche man die Green'sche Function kennt.

e. *Methode der Reihenentwickelungen.*

Für gewisse specielle Bereiche kann man ausser durch die bisher besprochenen Methoden auch durch *Reihenentwickelungen* zur Lösung der Randwerthaufgaben gelangen. Es ist dies nämlich in solchen Fällen möglich, wo man nach Einführung von krummlinigen Coordinaten ξ, η, ζ von der

Beschaffenheit, dass auf den einzelnen Stücken der Begrenzung je *eine* von ihnen *constant* ist, die Differentialgleichung $\Delta V = 0$ durch *Producte* von der Form $f \cdot \Xi_h(\xi) \mathsf{H}_i(\eta) \mathsf{Z}_k(\zeta)$ integriren kann, worin f eine ganz bestimmte Function von ξ, η, ζ ist, Ξ, H, Z hingegen Integrale gewisser *gewöhnlicher Differentialgleichungen* zweiter Ordnung sind, welche zwei willkürliche Parameter A, B enthalten. Ist nun der betrachtete Raum von je zwei Flächen $\xi =$ Const., $\eta =$ Const., $\zeta =$ Const. begrenzt, so wird man die Randwerthaufgaben so zerlegen, dass man zunächst ein Potential V_1 bestimmt, für welches auf *einer* der sechs Begrenzungsflächen $\overline{V}$ bezw. $\frac{\partial \overline{V}}{\partial n}$ oder $h\overline{V} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial n}$ die vorgeschriebenen Werthe, auf den übrigen fünf Flächen aber durchweg den Werth 0 hat; aus sechs solchen speciellen Lösungen setzt sich dann die allgemeine durch Superposition zusammen. Soll das Potential z. B. auf der Fläche $\zeta = \zeta_2$ die gegebenen Werthe $\overline{V}$ annehmen, so hat man die Parameter A, B und die Particularlösungen Ξ, H, Z so zu bestimmen, dass Ξ_h für $\xi = \xi_1$ und $\xi = \xi_2$, H_i für $\eta = \eta_1$ und $\eta = \eta_2$, Z_k für $\zeta = \zeta_1$ verschwindet, und dass die gegebene Function $\overline{V}(\xi, \eta)$ durch eine Reihe von der Form

$$f \cdot \sum_h \sum_i C_{h,i} \, \Xi_h \cdot \mathsf{H}_i \cdot \mathsf{Z}_k(\zeta_2)$$

dargestellt wird. Aehnlich ist zu verfahren, wenn die Werthe von $\frac{\partial \overline{V}}{\partial n}$ oder $h\overline{V} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial n}$ gegeben sind; die Grösse h muss jedoch im Allgemeinen nicht eine Constante, sondern eine ganz bestimmte Function längs der Begrenzung sein, wie gelegentlich schon früher (S. 92) hervorgehoben wurde.

Der allgemeinste Bereich, auf welchen bisher diese Methode angewendet worden ist, ist der von *F. Klein**) behandelte *von sechs confocalen Flächen zweiten Grades begrenzte Körper;* doch hat *Klein* in seiner Vorlesung über Lamé'sche Functionen (Winter 1889/90) gezeigt, dass sie auch für einen von sechs confocalen *Cycliden* begrenzten Körper zum Ziele

*) Math. Annalen **18**, p. 410.

führt, jedenfalls für die erste Randwerthaufgabe, und dass somit die für letztgenannten Bereich geltende Reihenentwickelung *alle* in der Potentialtheorie vorkommenden umfassen muss. Eine ausführliche Darlegung dieser Auffassung bildet das Thema einer von der Göttinger phil. Facultät für den Sommer 1891 gestellten Preisaufgabe.

Die Lösung der ersten Randwerthaufgabe durch Reihen für einfache specielle Fälle des eben erwähnten, namentlich für die Kugel durch die Entwickelung nach Kugelfunctionen sowie für den Kreis durch die Fourier'sche Reihe, ist der Gegenstand sehr zahlreicher Untersuchungen gewesen. *Dini* hat die *dritte* Randwerthaufgabe für den Kreis nach dieser Methode in der S. 185 erwähnten Arbeit behandelt, wobei sich zeigte, dass für bestimmte negative Werthe von h die gegebenen Randwerthe nicht ganz willkürlich sein dürfen. Diese Eigenthümlichkeit, welche mit dem Vorhandensein *ausgezeichneter* Lösungen der Differentialgleichung zusammenhängt und daher bei $\Delta u + k^2 u = 0$ noch wichtiger wird, ergiebt sich im obigen Falle wie folgt. Eine den Stetigkeitsbedingungen genügende Potentialfunction wird für das Innere des Kreises vom Radius $\bar{r}$ dargestellt durch die Reihe:

$$u = \sum_0^\infty {}^n \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi);$$

hieraus ergiebt sich:

$$hu + \frac{\partial u}{\partial r} = \sum_0^\infty {}^n \left(h + \frac{n}{r}\right)(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Sind nun die Werthe von $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$ durch die Fourier'sche Reihe

$$\sum_0^\infty {}^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

gegeben, so erhält man für die bisher unbestimmten Coefficienten a, b die Ausdrücke

$$a_n = \frac{A_n}{\frac{n}{r} + h}, \quad b_n = \frac{B_n}{\frac{n}{\bar{r}} + h},$$

zu welchen *Dini* auf etwas anderem Wege gelangt ist. Wenn nun h einen der Werthe $-\frac{n}{r}$ $(n = 0, 1, 2 \cdots \infty)$ besitzt, so müssen, damit die Coefficienten a_n und b_n mit dem entsprechenden Index n nicht unendlich gross werden, A_n und B_n gleich Null sein, d. h. die Glieder mit $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$ in der Fourier'schen Entwickelung für die an der Peripherie vorgeschriebene Function fehlen; dies ist also die der letzteren im Falle $h = -\frac{n}{r}$ aufzuerlegende Beschränkung. —

Vom *mathematischen* Standpunkte steht die Methode der Reihen, soweit es sich um den *Beweis* für die Lösbarkeit der Randwerthaufgaben handelt, hinter den unter b, c, d besprochenen Methoden zurück, weil bei ihr den gegebenen Randwerthen Beschränkungen auferlegt werden müssen, welche bei den anderen Methoden überflüssig sind, so die der abtheilungsweisen Monotonie und (damit die Reihe auch wirklich der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ genügt) der Existenz zweiter Ableitungen, und weil die Untersuchung des Verhaltens der Reihen bei der Annäherung an den Rand grosse Schwierigkeiten darbietet. — Wenn somit die Reihendarstellungen zur allgemeinen Erledigung der Randwerthaufgaben wenig geeignet sind, so besitzen sie doch die grösste Wichtigkeit für die physikalischen Anwendungen, wo es sich nur um eine *angenäherte* Lösung handelt. Indem man sich auf eine endliche Anzahl von Gliedern der Reihen beschränkt, wird man in letzteren ein Mittel haben, ein Potential zu bestimmen, welches sich den gegebenen Randwerthen überall mit gegebener Genauigkeit anschliesst, man wird also mit ihrer Hülfe eine Aufgabe der *Interpolationsrechnung* lösen. (K.) —

§ 3. Allgemeine Existenzbeweise und Eindeutigkeitsbeweise für die Lösungen der Randwerthaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und der verwandten Gleichungen.

In der mehrerwähnten Abhandlung*) über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, welche

*) *H. Weber,* Math. Ann. **1**, p. 1.

zu einer Zeit erschien, als die Bedenken gegen die Beweiskraft des Dirichlet'schen Princips noch nicht allgemein bekannt waren, hat *H. Weber* die Existenz einer Lösung der ersten Randwerthaufgabe für ebene Bereiche durch eine auf dem Grundgedanken des Dirichlet'schen Princips beruhende Schlussweise zu beweisen gesucht, die derjenigen ähnlich ist, welche er zum Nachweise der Existenz der *ausgezeichneten* Lösungen angewendet hat. (Vergl. II, § 4. S. 61.) Zunächst beweist er den Satz:

Soll eine Function u, welche im Innern eines beliebig begrenzten, ganz im Endlichen liegenden Bereiches nicht an einer Linie unstetig wird, für welche das über diesen Bereich erstreckte Integral $\iint u^2 dx\,dy$ einen gegebenen Werth c hat, und welche an der Begrenzung gegebene Werthe $\bar{u}$ annimmt, das über den ganzen Bereich genommene Integral $\iint \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy$ zu einem Minimum $= \Omega$ machen, so muss dieselbe im ganzen Bereiche endlich und stetig sein und der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügen, in welcher $k^2 = \frac{1}{c}\left(\Omega + \int \bar{u}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\,ds\right)$ ist.

Dieser Satz ist, wie auch seine Umkehrung, vollständig richtig, nicht aber der weitere Schluss *Weber's*, dass es für einen gegebenen Bereich immer eine endliche und stetige, sich am Rande vorgeschriebenen Werthen stetig anschliessende Function u geben müsse, welche der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügt, da $\iint \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy$ nothwendig ein Minimum annehmen müsse; denn gegen diesen Schluss sind eben dieselben Einwände zu erheben, wie gegen das Dirichlet'sche Princip in der Potentialtheorie. — Zunächst ergab der angeführte Schluss *H. Weber's* nur die Existenz der fraglichen Lösung für eine Differentialgleichung mit *unbestimmtem* k^2; da man aber den gegebenen Werth c und damit k^2 continuirlich ändern kann, so schloss *H. Weber* daraus weiter auf die Existenz bei *gegebenem* k^2,

falls letzteres nicht gerade ein ausgezeichneter Werth für den Bereich ist. (Ueber den letzteren Fall vergl. übrigens weiter unten.)

Wäre die *Weber*'sche Schlussweise überhaupt stichhaltig, so könnte sie natürlich ebenso auf räumliche Bereiche und mit geringen Modificationen, die aus den im Anfang des vorigen Paragraphen für Potentiale Gesagten ersichtlich sind, auf die zweite und dritte Randwerthaufgabe angewendet werden. Ferner liesse sie sich auf diejenigen partiellen Differentialgleichungen ausdehnen, welche in der von uns im I. Theile (S. 20) aufgestellten allgemeinen Form (2) und (3) enthalten und somit, wie in I, § 4 gezeigt wurde, der Ausdruck für das Verschwinden der ersten Variation eines über den ganzen Bereich erstreckten Integrales sind, dessen Element eine quadratische Form von $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$ und u ist; von dieser quadratischen Form müsste nur, damit die erwähnte Schlussweise anwendbar wäre, vorausgesetzt werden, dass sie für alle im ganzen Bereiche vorkommenden Werthe ihrer Coefficienten *definit* sei, weil andernfalls das Integral durch Abänderung der Function u beliebig grosse negative Werthe annehmen könnte, also keine untere Grenze für seinen Werth zu existiren brauchte. —

Auch bei der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ wird ein wirklicher Beweis für die Existenz einer Lösung der Randwerthaufgaben nur in einer *Methode zur Herstellung der Lösung* bestehen können. Eine solche ist bisher nur für *ebene* Bereiche und auch da nur unter gewissen Beschränkungen gefunden worden; diese Methode wird weiter unten ausführlich besprochen werden.

Vorläufig müssen wir uns daher für den allgemeinen Fall damit begnügen, dass die Existenz der Lösungen der Randwerthaufgaben durch die im § 1 dieses Theiles angestellten *physikalischen* Erwägungen *plausibel* gemacht ist. —

Was nun die *Eindeutigkeit* der Randwerthaufgaben anbetrifft, so lässt sich dieselbe für die Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ nicht allgemein, sondern nur unter denjenigen Beschränkun-

gen beweisen, durch welche *ausgezeichnete* Werthe von k^2 *ausgeschlossen* werden. Denn falls k^2 ein ausgezeichneter Werth für den betrachteten Bereich ist, d. h. ein solcher, für welchen es eine im ganzen Bereiche endliche und stetige, nicht identisch verschwindende Lösung u_h der Differentialgleichung giebt, die einer der Randbedingungen $\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ oder $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ genügt, so kann man zu einer Lösung, welche die vorgeschriebenen Randwerthe von u oder $\frac{\partial u}{\partial n}$ oder $hu + \frac{\partial u}{\partial n}$ besitzt, noch die mit einer willkürlichen Constante C_h multiplicirte *ausgezeichnete* Lösung u_h (bezw. eine Summe $\sum^h C_h u_h$, falls k^2 ein *mehrfacher* ausgezeichneter Werth ist) hinzufügen, die Lösung ist also durch jene Randwerthe *nicht vollständig bestimmt.*

Wir wollen im Folgenden zunächst für die *allgemeine* Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Variabeln von der Form (3) untersuchen, wann die Lösungen der Randwerthaufgaben eindeutig bestimmt sind, einmal, weil dabei das Wesentliche der Sache besser hervortritt, sodann auch, weil *Picard* und *Bianchi* diese Frage eingehend behandelt haben.

Das absolute Glied a_0 in der Differentialgleichung ist dabei unwesentlich; denn wenn die Gleichung *ohne* dasselbe nur *eine* den Randbedingungen genügende Lösung besitzt, so gilt dies sofort auch für die Gleichung *mit* dem Gliede a_0, indem dasselbe ja fortfällt, wenn man die Differentialgleichung für die *Differenz* zweier etwa existirender Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung bildet. Wir wollen daher die von *Picard* in seiner ersten auf den Gegenstand bezüglichen Abhandlung (Acta Math. XII) untersuchte Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A' \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B \frac{\partial u}{\partial x} + A'' \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda f u = 0$$

betrachten, worin λ dieselbe Bedeutung hat, wie sonst k^2. Diese Gleichung (in II, § 4 mit (13) bezeichnet*)) ist der

*) Dort ist die Function f mit A''' bezeichnet, um Verwechselungen mit dem Flächenelement df zu vermeiden.

Ausdruck dafür, dass die erste Variation des über den gegebenen Bereich erstreckten Integrales

$$\iint F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint \left\{A'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + A''\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2B'u\frac{\partial u}{\partial y} + 2B''u\frac{\partial u}{\partial x} + Au^2\right\} dx\,dy$$

verschwindet, in welchem die Functionen B', B'', A willkürlich sind bis auf die Relation*):

$$\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - A = \lambda f.$$

Mit obiger Differentialgleichung haben wir uns schon im § 4 des II. Theiles beschäftigt gelegentlich der Untersuchung über die Integraleigenschaften der Normalfunctionen. Dort definirten wir als ausgezeichnete Lösungen (bezw. Normalfunctionen bei Hinzukommen der Integraleigenschaften) solche im Gebiete durchaus endliche und stetige Lösungen u, für welche, ohne dass sie überall verschwinden, an der Begrenzung entweder $\bar{u}$ oder allgemein

$$(14)\quad \left(A'\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + B\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)\cos(nx) + \left(B\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + A''\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)\cos(ny) + \alpha\bar{u}$$

gleich Null ist. (α kann eine beliebige Function längs des Randes sein.) Diese allgemeine Grenzbedingung entsteht, wenn man verlangt, dass die erste Variation des Ausdruckes $\iint F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + \int \alpha\bar{u}^2 ds$ verschwinden soll (vgl. II, § 4, S. 54). Dass die eben erwähnte Randbedingung auch diejenige ist, welche sich bei gewissen auf die Differentialgleichung (13) führenden physikalischen Problemen darbietet, geht aus den Entwickelungen in § 1 des II. Theiles hervor. Entsprechend jener Grenzbedingung ist hier die zweite bezw. dritte Randwerthaufgabe so zu fassen, dass die Werthe von

$$\left(A'\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + B\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)\cos(nx) + \left(B\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + A''\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)\cos(ny)$$

bei der zweiten, diejenigen des allgemeinen Ausdruckes (14)

*) Vergl. I. Theil, B, § 4, S. 26.

bei der dritten längs der Begrenzung mit einer daselbst vorgeschriebenen Function $\bar{u}^{(1)}$ bezw. $\bar{u}^{(2)}$ übereinstimmen sollen. —

Um nun zu entscheiden, ob es *zwei verschiedene* Lösungen der einzelnen Randwerthaufgabe geben kann, nehme man an, dies sei möglich, und betrachte die *Differenz* der beiden vorausgesetzten Lösungen. Diese Differenz genügt natürlich ebenfalls der Differentialgleichung (13), ausserdem aber der Randbedingung $\bar{u} = 0$ oder der allgemeinen (14), d. h. sie ist eine *ausgezeichnete* Lösung. Die oben gestellte Frage kommt also darauf zurück, ob es für den gegebenen Bereich und den gegebenen Werth von λ ausgezeichnete Lösungen der partiellen Differentialgleichung (13) giebt. Ueber diese Frage, welche uns schon im II. Theile (§ 4) entgegentrat, giebt die dort abgeleitete Gleichung

$$(16) \quad \iint \left\{ A' \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + A'' \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \lambda f u^2 \right\} dx dy + \int \alpha \bar{u}^2 ds = 0,$$

welche für irgend eine der allgemeinen Randbedingung genügende ausgezeichnete Lösung gilt (und in welcher der früher angewandte Index h bei u und λ hier fortgelassen ist), uns theilweise Aufschluss, wie wir sogleich näher sehen werden. Zu dieser Gleichung ist noch zu bemerken, dass im Falle der zweiten Randbedingung einfach $\alpha = 0$ zu setzen ist, und im Falle der ersten das Randintegral ebenfalls fortfällt, weil dann die Function u (hier die Differenz der beiden hypothetischen Lösungen der ersten Randwerthaufgabe) an der ganzen Begrenzung verschwindet. Dass die Differenz u nicht von 0 verschieden sein kann, mithin nur *eine* Lösung des Problems existirt, lässt sich *allgemein* nur schliessen, wenn die Grösse α *an keiner Stelle des Randes negativ* und die unter dem Doppelintegral stehende quadratische Form von $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, u für alle Punkte des Gebietes *definit* ist; denn dann sind alle Elemente der beiden Integrale positiv, also die Gleichung (16) unmöglich, ausser wenn u überall $= 0$ ist. Die Bedingung, dass die besagte

quadratische Form definit sei, ist, da wir dies von der Form $A'\xi^2 + 2B\xi\eta + A''\eta^2$ ausdrücklich vorausgesetzt haben, immer erfüllt, wenn die Function f im ganzen Gebiete positiv (oder gleich Null) und die Constante λ negativ ist oder umgekehrt. In diesem Falle ist also, wenn ausserdem $\alpha \geqq 0$ ist, die Lösung der Randwerthaufgabe, falls sie existirt, immer *eindeutig.* Derselbe kommt in der Physik z. B. vor bei dem Problem der *stationären Wärmeströmung* in einer dünnen krystallinischen leitenden Platte, deren Flächen gegen die Umgebung von der constanten Temperatur 0 (oder auch von variabeler Temperatur, wo dann in der Differentialgleichung noch das, wie wir oben gesehen haben, für die gegenwärtige Betrachtung irrelevante absolute Glied hinzuträte) frei Wärme ausstrahlen, und hierbei ist es in der That, wenigstens für die erste und dritte Randwerthaufgabe, evident, dass nur *eine* Lösung existirt (vergl. § 1 dieses Theiles).

Sind die Functionen A', B, A'', f für die *ganze Ebene* erklärt, und ist die oben genannte Bedingung in allen Punkten derselben erfüllt, so kann man schliessen, dass die erste und zweite Randwerthaufgabe und bei positiven Werthen von α auch die dritte für *beliebig grosse* Bereiche nur je eine einzige Lösung besitzen.

Wenn die Function λf *nicht überall negativ* ist oder gar in der ganzen Ebene *positiv*, wie im Falle der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ mit reellem k, so lässt sich nicht ohne Weiteres entscheiden, ob nur *eine* Lösung existiren kann. *Picard**) hat für die *erste* Randwerthaufgabe ein Mittel zu dieser Entscheidung angegeben, welches auf die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda f u = 0$**) anwendbar ist oder auch auf die allgemeinere

*) *Picard,* Acta mathematica XII, p. 323—338. Die Verallgemeinerung findet sich in der schon früher erwähnten neueren Abhandlung: Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. Journ. de Math. (4) VI, 1890; p. 145—210. Cap. I. Vergl. darüber weiter unten.

**) Auf die von *H. A. Schwarz* angestellte ausführliche Untersuchung über die erste Randwerthaufgabe für die Lösungen dieser Differentialgleichung kommen wir später zurück.

$$\Delta u + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda f u = 0,$$

in der nicht einmal, wie es die Beschränkung auf die von uns betrachtete Classe von Differentialgleichungen erfordern würde, $\frac{\partial d}{\partial y} = \frac{\partial e}{\partial x}$ zu sein braucht. Dieses Mittel beruht darauf, dass man zu der unter dem Doppelintegral in Gl. (16) stehenden quadratischen Form irgend ein vollständiges Differential $\frac{\partial}{\partial x}(B''u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(B'u^2)$, worin B' und B'' endliche, stetige und differentiirbare, sonst willkürliche Functionen von x, y sind, hinzufügen kann, ohne dass sich etwas ändert, weil sich nämlich $\iint\left\{\frac{\partial}{\partial x}(B''u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(B'u^2)\right\} dxdy$ auf ein in Folge der Bedingung $\bar{u} = 0$ verschwindendes Randintegral reducirt*). Die Bedingung für die Eindeutigkeit ist dann die, dass

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2B''u\frac{\partial u}{\partial x} + 2B'u\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - \lambda f\right)u^2$$

für alle Punkte des Bereiches eine definite Form sein muss. Hierzu ist nothwendig und hinreichend, dass die Ungleichung gilt:

$$(75)\qquad \frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - \lambda f > B'^2 + B''^2;$$

im Falle der oben angegebenen allgemeineren, d. h. die Glieder $2d\frac{\partial u}{\partial x}$ und $2e\frac{\partial u}{\partial y}$ enthaltenden Differentialgleichung ergiebt sich hieraus die Bedingung:

$$(75')\qquad \frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} - \lambda f > B'^2 + B''^2.$$

Wenn es möglich ist, irgend zwei endliche und stetige Functionen B', B'' zu finden, welche im ganzen Gebiete dieser Ungleichung genügen, so ist man also sicher, dass für dieses Gebiet die Lösung u vollständig durch ihre Randwerthe bestimmt ist.

Handelt es sich um die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u$

---

*) Aus demselben Grunde treten in dem Integral, dessen erste Variation, gleich Null gesetzt, die allgemeine Differentialgleichung (13) liefert, die willkürlichen Glieder mit B' und B'' auf.

$= 0$, ist also $f = 1$, $d = e = 0$, so setzt *Picard* $B' = 0$ und sucht B'' als Function von x allein so zu bestimmen, dass

$$\frac{dB''}{dx} - k^2 > B''^2$$

wird, wodurch dann die obige Ungleichung erfüllt ist. Zu diesem Zwecke nimmt er eine Constante $k'^2 > k^2$ an und bestimmt B'' aus der Differentialgleichung

$$\frac{dB''}{dx} - B''^2 = k'^2.$$

Das Integral derselben ist

$$B'' = k' \operatorname{tg}(k'x + C),$$

unter C die Integrationsconstante verstanden.

Man kann nun k' beliebig wenig von k verschieden wählen. Die Function B'' bleibt endlich und stetig, wenn man x auf das Intervall $\frac{-C}{k'} - \frac{\pi}{2k'} < x < \frac{-C}{k'} + \frac{\pi}{2k'}$ beschränkt; die verlangte Bestimmung von B' und B'' ist demnach *für jedes Gebiet* möglich, welches ganz zwischen zwei Parallelen zur y-Axe, deren Abstand kleiner als $\frac{\pi}{k}$ ist, oder überhaupt *innerhalb eines Parallelstreifens von einer die Grösse* $\frac{\pi}{k}$ *nicht übersteigenden Breite* liegt, insbesondere also für jedes Gebiet, dessen Dimensionen in keiner Richtung grösser als $\frac{\pi}{k}$ sind. Natürlich ist damit noch nicht gesagt, dass man der fraglichen Ungleichung nicht auch noch für *grössere* Bereiche genügen kann. — *Picard* hat gezeigt, dass jene Ungleichung nicht nur die Bedingung für die *Eindeutigkeit* der ersten Randwerthaufgabe, sondern auch für die Anwendbarkeit des *Schwarz*'schen Lösungsverfahrens ist, ein Punkt, auf den wir an einer späteren Stelle zurückkommen werden.

Bei den im Vorhergehenden besprochenen Betrachtungen, welche sich im Wesentlichen der *Picard*'schen Arbeit in Bd. XII der Acta math. anschliessen, wurde in keiner Weise die Entstehung der Differentialgleichung (13) durch Variation eines Integrales benutzt; wir haben uns bisher auf diese Classe von Differentialgleichungen nur deshalb beschränkt, weil sie allein

es sind, die bei den uns interessirenden physikalischen Problemen auftreten. Indessen ist es der Vollständigkeit halber vielleicht nützlich, die zulässigen Verallgemeinerungen der vorhergehenden Entwickelungen jetzt noch kurz anzuführen. Der Eindeutigkeitsbeweis wäre offenbar ganz derselbe gewesen, wenn die Gleichung gelautet hätte

$$(13') \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(A'\frac{\partial u}{\partial x} + B_1\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B_2\frac{\partial u}{\partial x} + A''\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda f u$$
$$= A'\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B_1 + B_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A''\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$+ \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial A''}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda f u = 0,$$

sofern dabei nur die quadratische Form

$$A'\xi^2 + (B_1 + B_2)\xi\eta + A''\eta^2$$

als *definit* und die Vorzeichen von A' und λf als entgegengesetzt vorausgesetzt werden; mit anderen Worten: er ist anwendbar auf jede lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung *vom elliptischen Typus*, in welcher die Coefficienten von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ und $-u$ gleiches Vorzeichen haben. In der That hat *Picard* später in der citirten Arbeit im Journ. de Math. den Eindeutigkeitsbeweis auf die Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda f u = 0$$

mit beliebigem d und e ausgedehnt (siehe S. 274), auf welche sich, wie schon *Du Bois-Reymond* gezeigt hat*), jede Differentialgleichung des elliptischen Typus durch Substitution von neuen unabhängigen Variabeln zurückführen lässt. Dieser Beweis war jedoch schon früher von *Bianchi* in grösster Allgemeinheit, auch für den Fall beliebig vieler unabhängiger Variabeln, geführt worden**). Wir sahen schon im § 4 des I. Theiles, dass *Bianchi* die allgemeinste lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln auf die Form gebracht hat:

---

*) Vergl. Theil I, B, § 4.

**) *L. Bianchi*: Sulle equazioni lineari a derivate parziali del 2^0 ordine. Rend. della r. accad. dei Lincei; V, 2, 1889, p. 35.

$$D(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left((2b-\alpha)\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$= \gamma u + \delta,$$

welche, abgesehen von dem für die Eindeutigkeit der Randwerthaufgabe nicht in Betracht kommenden Gliede δ, mit der oben angegebenen verallgemeinerten Gleichung (13′) völlig übereinstimmt. Unter der Voraussetzung, dass $ac > b^2$ und $\frac{a}{\gamma} > 0$, d. h. die Form

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + \gamma\zeta^2$$

in allen Punkten des Gebietes *definit* ist, ergiebt sich daher durch die oben entwickelte Betrachtungsweise, welche derjenigen von *Bianchi* völlig analog ist, dass die Function u *durch ihre Randwerthe eindeutig bestimmt ist.* Es reicht für diesen Beweis *nicht* aus, dass $ac > b^2$, d. h. der Typus der Differentialgleichung der *elliptische* ist. Wird dies letztere allein vorausgesetzt, so lässt sich nur behaupten:

Die den gewöhnlichen Stetigkeitsbedingungen genügenden (von Bianchi regulär genannten) Lösungen einer Differentialgleichung $D(u) = \gamma u + \delta$ vom elliptischen Typus sind durch ihre Randwerthe eindeutig bestimmt, sofern man nur Gebiete betrachtet, die gewisse, allgemein nicht näher angebbare Grenzen nicht überschreiten.

Um dies zu beweisen, leitet *Bianchi* erst den Satz ab:

Wenn die Gleichung $D(u) = \gamma u$ für das gegebene Gebiet ein reguläres Integral v zulässt, welches weder im Innern, noch auf dem Rande verschwindet, so sind zwei Lösungen obiger Differentialgleichung, die auf dem Rande übereinstimmen, überhaupt identisch.

Ist nämlich u ein „reguläres Integral“, welches auf dem Rande $= 0$ ist, also eine *ausgezeichnete* Lösung des Bereiches, und setzt man $u = U \cdot v$, so genügt U der Gleichung

$$a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{2}{v}\left(a\frac{\partial v}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial U}{\partial x}$$
$$+ \frac{2}{v}\left(b\frac{\partial v}{\partial x} + c\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

welche sich von der Differentialgleichung $D(u) = 0$ nur

durch die Coefficienten der ersten Differentialquotienten unterscheidet, und ist ausserdem überall endlich und stetig, da v nirgends $= 0$ wird. Von einer solchen Differentialgleichung ohne ein mit u proportionales Glied ist aber bereits bekannt, dass sie bei der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ *keine* von Null verschiedene ausgezeichnete Lösung besitzen kann; folglich ist U und auch $u = 0$, w. z. b. w.

Ist nun u eine beliebig angenommene, gar keiner Grenzbedingung unterworfene, in dem betrachteten Gebiete T überall endliche und stetige Lösung von $D(u) = \gamma u$, so kann man jedenfalls einen *Theil* T' von T so abgrenzen, dass diese Lösung innerhalb T' und auf dessen Begrenzung nirgends $= 0$ wird, und dann auf dieses Theilgebiet den vorstehenden Hülfssatz anwenden. Da ferner die Lösung von $D(u) = \gamma u + \delta$ eindeutig durch ihre Randwerthe bestimmt ist, sobald dies von derjenigen von $D(u) = \gamma u$ gilt, so ergiebt sich schliesslich der oben ausgesprochene erste allgemeine Satz für die Lösungen der Differentialgleichungen vom elliptischen Typus.

Die allgemeinste lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit n Variabeln denkt sich *Bianchi* auf die Form gebracht

$$D_n(u) = \sum_1^n {}^i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_1^n {}^k \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \alpha_{ik} = \gamma u + \delta,$$

was immer möglich ist. — Für ein Gebiet S_n von n Dimensionen, in welchem $X_1, \ldots X_i, \ldots X_n$ endliche und stetige Functionen sind, gilt die *verallgemeinerte Green'sche Gleichung*:

$$\int\limits_{(S_n)} \left(\sum_1^n {}^i \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right) dS_n = - \int\limits_{(S_{n-1})} \left(\sum_1^n {}^i \bar{X}_i \frac{\partial x_i}{\partial p} \right) dS_{n-1},$$

wo dS_{n-1} ein Element der Begrenzung von S_n und dp ein Element von deren „innerer Normale" im verallgemeinerten Sinne bedeutet. Setzt man hierin $X_i = u \sum^k \alpha_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}$, wo u ein „reguläres" Integral von $D_n(u) = \gamma u$ ist, so ergiebt sich

$$\int\limits_{(S_n)} \left\{ \gamma u^2 + \sum^i \sum^k \alpha_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\} d S_n$$

$$= - \int\limits_{(S_{n-1})} \bar{u} \left\{ \sum^i \frac{\partial x_i}{\partial p} \sum^k \bar{\alpha}_{ik} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} \right\} d S_{n-1};$$

wird nun vorausgesetzt, dass die quadratische Form

$$\sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^k \alpha_{ik} \xi_i \xi_k$$

definit, die Differentialgleichung $D_n(u) = \gamma u + \delta$ also vom *„ellipsoidischen“* Typus ist, und dass ausserdem γ im ganzen Bereiche dasselbe Vorzeichen hat, wie jene quadratische Form, so folgt aus der vorstehenden Relation, *dass u im ganzen Gebiete verschwinden muss, wenn die Randwerthe $\bar{u} = 0$ sind.* Ferner beweist *Bianchi* auf ganz analogem Wege, wie im Falle von zwei Dimensionen, den Satz:

Wenn die Differentialgleichung $D_n(u) = \gamma u$ eine endliche und stetige Lösung besitzt, welche weder im Innern des Gebietes, noch auf dessen Begrenzung gleich Null wird, so fallen zwei Lösungen, welche auf der letzteren übereinstimmen, auch im ganzen Gebiete zusammen,

und mit Hülfe desselben den allgemeinen Satz:

Die regulären Integrale einer Differentialgleichung $D_n(u) = \gamma u + \delta$ vom ellipsoidischen Typus sind für geschlossene Gebiete S_n, deren Dimensionen gewisse Grenzen nicht überschreiten, durch ihre Randwerthe eindeutig bestimmt.

Einen Versuch zur Abschätzung jener Grenzen, welche das Gebiet nicht überschreiten darf, hat *Bianchi*, auch für den Fall von zwei Dimensionen, nicht gemacht. Das einzige Mittel, welches hierfür bisher angegeben ist, ist die oben besprochene von *Picard* angegebene Ungleichung und ein später mitzutheilendes Grenzverfahren von *H. A. Schwarz*, welches sich ebenfalls auf die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 f u = 0$ bezieht.

Es sei noch erwähnt, dass die Sätze *Bianchi's* auch ebenso für die verallgemeinerte *zweite* Randwerthaufgabe, worunter die Bestimmung einer Lösung von $D_n(u) = \gamma u + \delta$

aus den Randwerthen von $\sum^i \frac{\partial x_i}{\partial p} \sum^k \alpha_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}$ zu verstehen ist, aufgestellt werden könnten, wie aus der Art ihrer Ableitung sofort ersichtlich ist.

§ 4. Lösung der Randwerthaufgaben für die Functionen u mit Hülfe verallgemeinerter Green'scher Functionen.

Wie in der Potentialtheorie, so kann man auch in der Theorie der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ die allgemeinen Randwerthaufgaben lösen, wenn man gewisse specielle Lösungen derselben kennt, nämlich solche, bei denen die gegebenen Randwerthe von u, bezw. $\frac{\partial u}{\partial n}$ oder $hu + \frac{\partial u}{\partial n}$, im Raume von drei Dimensionen gleich $-\frac{1}{r}$, bezw. $-\frac{\partial \frac{1}{\bar{r}}}{\partial n}$ oder $-h \cdot \frac{1}{\bar{r}} - \frac{\partial \frac{1}{\bar{r}}}{\partial n}$, in der Ebene gleich $\log \bar{r}$, bezw. $\frac{\partial \log \bar{r}}{\partial n}$ oder $h \log \bar{r} + \frac{\partial \log \bar{r}}{\partial n}$ sind, wenn $\bar{r}$ den Abstand des Randpunktes von einem festen Punkte des Gebietes bezeichnet, oder allgemeiner solche, bei denen die Randwerthe durch eine Summe von Gliedern der angegebenen Form dargestellt werden. Mit Hülfe dieser speciellen Lösungen der Randwerthaufgaben lassen sich dann Functionen bilden, für welche an der Begrenzung u oder $\frac{\partial u}{\partial n}$ oder $hu + \frac{\partial u}{\partial n}$ gleich *Null* ist, welche aber innerhalb des Gebietes gewisse *Unstetigkeitspunkte* besitzen; dieselben sind analog den im § 2 dieses Theiles betrachteten Green'schen Functionen, gewissermassen Verallgemeinerungen derselben, weshalb es gestattet sein mag, dieselben im Folgenden ebenfalls kurz *Green'sche Functionen* zu nennen und mit G, Γ und $\mathfrak{G}$ zu bezeichnen.

Im Nachstehenden werde ich die Theorie dieser „Green-schen Functionen" (im Princip auf Grund mündlicher Andeutungen von Herrn Prof. *F. Klein*) entwickeln, wobei die

Existenz dieser Functionen, die sich mathematisch wohl nur durch Angabe sines Verfahrens zur wirklichen Herstellung beweisen liesse, wiederum durch physikalische Erwägungen begründet werden wird. Ich werde mich dabei auf die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ beschränken, obgleich die Verallgemeinerung für die Gleichungen (2) bezw. (3) S. 20 wohl kaum Schwierigkeiten bieten würde.

Es sind bei dieser Untersuchung zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die gegebene Constante k^2 ein *ausgezeichneter* Werth für den betrachteten Bereich (und die der gerade behandelten Randwerthaufgabe entsprechende Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ oder $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$) ist oder nicht.

Zunächst setzen wir das letztere voraus, worin dann von selbst enthalten ist, dass nur *eine* Lösung der Randwerthaufgabe möglich ist.

a. *k^2 ist kein ausgezeichneter Werth.*

I. Erste Randwerthaufgabe. Die verallgemeinerte *Green'sche Function* $G_{xyz}^{x_0 y_0 z_0}$, welche hier einzuführen ist, definiren wir *als eine der Differentialgleichung* $\Delta u + k^2 u = 0$ *genügende Function von x, y, z, welche an einer Stelle x_0, y_0, z_0 des Gebietes unendlich gross wird wie $\frac{\cos k r_0}{r_0}$ im Raume, wie $-Y_0(kr_0)$ in der Ebene, welche sonst im ganzen Gebiete eindeutig, endlich und stetig ist und an der ganzen Begrenzung den Werth 0 hat.*

Ihre Existenz für beliebige ebene Bereiche erschliessen wir aus den evidenten physikalischen Thatsachen, dass eine Membran mit festem Rande durch eine in einem Punkte wirkende periodische Kraft schliesslich in erzwungene Schwingungen von der Periode der Kraft versetzt wird, ebenso eine offene Luftplatte durch eine in einem inneren Punkte befindliche Schallquelle, dass ferner eine horizontal ausgespannte Membran, auf welche an einer kleinen Stelle ein Druck vertical nach unten wirkt, und welche ausserdem bis zum Niveau ihres

Randes mit einer schweren Flüssigkeit bedeckt ist, eine bestimmte Gleichgewichtslage annehmen muss; endlich bei negativem k^2 daraus, dass in einer frei ausstrahlenden leitenden Platte, deren Rand auf der Temperatur 0 erhalten wird, und welche eine punktförmige constante Wärmequelle enthält, bei jeder Form der Begrenzung und jedem Verhältniss des Ausstrahlungs- zum Leitungsvermögen endlich eine stationäre Wärmeströmung eintreten wird. Im Falle *räumlicher* Bereiche ist mir kein anschaulicher physikalischer Vorgang bekannt, der sich zur Begründung anführen liesse; hier können wir also die Existenz der Function G vorerst nur aus der Analogie der ebenen Bereiche schliessen. — In allen angeführten Fällen muss man sich, da ein unendlich grosser, in einem Punkte wirkender Druck, eine punktförmige Schallquelle von unendlicher Intensität und eine punktförmige Wärmequelle von unendlich hoher Temperatur physikalisch unmöglich sind, die periodische Druckkraft, die Schall- oder Wärmequelle zunächst über ein kleines Gebiet von zwei bezw. drei Dimensionen ausgebreitet denken und dann dieses Gebiet bei constanter Gesammtwirkung der die Schwingungen erregenden Kraft oder Gesammtergiebigkeit der Wärmequelle kleiner und kleiner werden lassen; es erscheint vom physikalischen Standpunkte aus unzweifelhaft, dass sich die entsprechende Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ bei diesem Processe einer bestimmten Grenzfunction nähert, welche letztere eben die Green'sche Function ist. In diesem Sinne ist es auch immer zu verstehen, wenn späterhin zur Begründung der Existenz gewisser Functionen von Kräften, die in einzelnen *Punkten* wirken, oder von einzelnen Erregungs- und Wärmezuleitungs*punkten* die Rede ist. (Vergl. hierüber § 1 des III. Theiles, S. 193—194.)

Kennt man nun die Function $G_{xyz}^{x_0 y_0 z_0}$ des gegebenen Bereiches, den wir, wie immer in diesem Paragraphen, als ganz im Endlichen liegend voraussetzen, so ergiebt die Anwendung des Green'schen Satzes genau wie in der Potentialtheorie die *Lösung der ersten Randwerthaufgabe* in folgender Form:

$$(76) \qquad u(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint \bar{u}\,\frac{\partial G^{x_0 y_0 z_0}_{x\,y\,z}}{\partial n}\,do,$$

$$\text{bezw.} = -\frac{1}{2\pi}\int \bar{u}\,\frac{\partial G^{x_0 y_0}_{x\,y}}{\partial n}\,ds.$$

Wenn man in der für irgend zwei eindeutige, endliche und stetige Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ geltenden Gleichung

$$\iint \left(\bar{u}'\frac{\partial \bar{u}''}{\partial n} - \bar{u}''\frac{\partial \bar{u}'}{\partial n}\right) do = 0$$

$u' = G^{x_0 y_0 z_0}_{x\,y\,z}$, $u'' = G^{x\,y\,z}_{x_0 y_0 z_0}$ setzt und sie auf den gegebenen Bereich anwendet, aus welchem die Punkte x_0, y_0, z_0 und x, y, z durch zwei unendlich kleine Kugeln ausgeschnitten zu denken sind, so erhält man, da der auf die Begrenzungsfläche des Bereiches bezügliche Theil des Doppelintegrals zufolge der Definition der Function G verschwindet, und da auf der um den Punkt x, y, z beschriebenen kleinen Kugel $G_{xyz} = \frac{1}{r_{xyz}}$ gesetzt werden kann,

$$G^{x_0 y_0 z_0}_{x\,y\,z} = G^{x\,y\,z}_{x_0 y_0 z_0};$$

es gilt also, wie in der Potentialtheorie, der Satz, *dass man den Argumentpunkt und Parameterpunkt der Function G mit einander vertauschen kann.* Ebenso ist es natürlich im Falle zweidimensionaler Bereiche. — Dieser *„Reciprocitätssatz der Green'schen Function G"* gestattet eine anschauliche *physikalische Deutung* besonders bei dem schon oben angeführten Problem der stationären Wärmeleitung in einer gegen die Umgebung von constanter Temperatur frei ausstrahlenden Platte, welche eine punktförmige Wärmequelle enthält, und deren Rand auf der Temperatur der Umgebung erhalten wird. Die Function $G^{x_0 y_0}_{x\,y}$ bedeutet dabei die von der Temperatur der Umgebung an gerechnete Temperatur im Punkte x, y, wenn sich die Wärmequelle in x_0, y_0 befindet, und der Satz $G^{x_0 y_0}_{xy} = G^{xy}_{x_0 y_0}$ sagt also aus, *dass die Temperatur im Punkte x, y, wenn die Wärmequelle in x_0, y_0 liegt, die gleiche ist, welche im Punkte*

x_0, y_0 *herrschen würde, wenn sich dieselbe Wärmequelle in* x, y *befände.* Beim Problem der nichtstationären Wärmeströmung (Erkaltung) lässt sich der Reciprocitätssatz übrigens ganz ähnlich deuten.

Auf die Ersetzung beliebiger „Geschwindigkeitspotentiale" u durch solche einfacher Oberflächenschichten von Erregungspunkten, welche sich aus der Gleichung (76) folgern lässt, werden wir erst später eingehen, weil die hierzu erforderliche Anwendung des Green'schen Satzes auf Räume, die sich in's Unendliche erstrecken, bei den Functionen u besondere Vorsicht erfordert.

II. Die zweite Randwerthaufgabe, d. h. die Bestimmung einer eindeutigen, endlichen, stetigen Lösung u aus den Randwerthen $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$, lässt sich mit Hülfe einer durch folgende Eigenschaften definirten *„zweiten Green'schen Function"* $\Gamma_{x\,y\,z}^{x_0 y_0 z_0}$ lösen:

Die Function $\Gamma_{xyz}^{x_0 y_0 z_0}$ *genügt der partiellen Differentialgleichung* $\Delta u + k^2 u = 0$ *und ist im gegebenen Bereiche eindeutig, endlich und stetig, ausser in dem Punkte* x_0, y_0, z_0, *in welchem sie unendlich gross wird wie* $\frac{\cos k r_0}{r_0}$ *im Falle eines dreidimensionalen, wie* $- Y_0(k r_0)$ *im Falle eines zweidimensionalen Bereiches; an der ganzen Begrenzung des Bereiches ist* $\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial n} = 0$.

Dass hier *nicht*, wie in der Potentialtheorie, *zwei* Erregungspunkte von entgegengesetzter Intensität eingeführt zu werden brauchen, ist eine Folge davon, dass nach den Gleichungen (64) (III, § 3, S. 211) das Integral $\int\!\!\int \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\, do$ oder $\int \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds$ *nicht* einfach gleich $- 4\pi \sum^h a_h$ oder $- 2\pi \sum^h a_h$ ist, wenn die a_h die Intensitäten der singulären Punkte, d. h. die Factoren der unendlich gross werdenden Glieder der Reihenentwickelung für u, bezeichnen; in der Potentialtheorie ist letzteres bekanntlich der Fall, und es ist daher nicht möglich, dass für ein Potential mit nur *einem* Unstetigkeits-

(Massen-)punkt innerhalb des Bereiches der Werth von $\frac{\partial \overline{V}}{\partial n}$ an der Begrenzung überall verschwindet. Die Nothwendigkeit, der zweiten Green'schen Function in der Potentialtheorie *zwei* Pole beizulegen, ergiebt sich, wie die Entwickelungen des Abschnittes *b* dieses Paragraphen noch zeigen werden, auch daraus, dass die Potentialgleichung $\Delta V = 0$ bei der Randbedingung $\frac{\partial \overline{V}}{\partial n} = 0$ die *ausgezeichnete Lösung* $V = Const.$ besitzt; übrigens kommt dieser Grund schliesslich auf dasselbe hinaus, wie der zuerst angeführte. —

Zur Begründung der *Existenz* der soeben definirten Function $\Gamma_{xyz}^{x_0 y_0 z_0}$ ist die physikalische Thatsache anzuführen, dass eine in einer beliebigen geschlossenen Fläche eingeschlossene Luftmasse oder eine geschlossene Luftplatte von beliebiger Gestalt durch einen im Innern befindlichen Erregungspunkt von gegebener Periode, die nicht mit derjenigen einer Eigenschwingung übereinstimmt, jedenfalls in bestimmte Schwingungen von der gleichen Periode versetzt wird; ferner bei zweidimensionalen Bereichen und negativem k^2 der Umstand, dass in einer frei ausstrahlenden Platte, deren Rand vor Wärmeabgabe geschützt ist, und der in einem inneren Punkte Wärme zugeführt wird, im Laufe der Zeit zweifellos eine stationäre Temperaturvertheilung eintritt.

Die *Lösung der zweiten Randwerthaufgabe* erhält man mit Hülfe dieser Function Γ durch die gewöhnliche Anwendung des Green'schen Satzes in der Form

$$(77) \qquad u(x_0, y_0, z_0) = +\frac{1}{4\pi}\iint \overline{\Gamma}_{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}}^{x_0 y_0 z_0} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial n}\, do$$

$$\text{bezw. } u(x_0, y_0) = +\frac{1}{2\pi}\int \overline{\Gamma}_{\overline{x}\,\overline{y}}^{x_0 y_0} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial n}\, ds.$$

Wie man sieht, ist hier im Gegensatz zur Potentialtheorie die Function u durch die Randwerthe $\frac{\partial \overline{u}}{\partial n}$ *vollständig* bestimmt, was ja, wie schon gesagt, in der oben gemachten Voraussetzung liegt, dass k^2 kein ausgezeichneter Werth sein soll. —

Gerade wie für die Function G ergiebt sich für Γ der *Reciprocitätssatz*

$$\Gamma_{x\,y\,z}^{x_0\,y_0\,z_0} = \Gamma_{x_0\,y_0\,z_0}^{x\,y\,z} \quad \text{bezw.} \quad \Gamma_{x\,y}^{x_0\,y_0} = \Gamma_{x_0\,y_0}^{x\,y}.$$

Derselbe ist bereits von *H. v. Helmholtz* in seiner „Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden“ abgeleitet worden und hat in der Akustik die Bedeutung, *dass eine in einem Punkte x_0, y_0, z_0 befindliche einfache Schallquelle in einem Punkte x, y, z dieselbe Schallintensität*) hervorbringt, welche dieselbe Schallquelle, wenn sie in x, y, z läge, im Punkte x_0, y_0, z_0 erzeugen würde.* Dies lässt sich jedoch im Allgemeinen nur für *geschlossene* Lufträume in der erwähnten Weise begründen; wie es sich bei in's Unendliche ausgedehnten Räumen verhält, wird später zu erörtern sein. — Die physikalische Bedeutung des Reciprocitätssatzes für die *Wärmeprobleme* bedarf nach dem darüber bei der Function G Gesagten hier keiner weiteren Besprechung. —

III. Um die dritte Randwerthaufgabe zu lösen, führen wir eine *dritte Green'sche Function* $\mathfrak{G}_{x\,y\,z}^{x_0\,y_0\,z_0}$ (bezw. $\mathfrak{G}_{x\,y}^{x_0\,y_0}$) ein, welche folgende charakteristische Eigenschaften besitzt:

Die Function $\mathfrak{G}_{x\,y\,z}^{x_0\,x_0\,z_0}$ genügt der Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

ist im gegebenen Bereiche eindeutig, endlich und stetig ausser im Punktex $_0$, y_0, z_0 bezw. x_0, y_0, wo sie unendlich gross wird wie $\frac{\cos k r_0}{r_0}$ bezw. $-Y_0(k r_0)$, und besitzt längs der ganzen Begrenzung des Bereiches verschwindende Werthe von $h\overline{\mathfrak{G}} + \frac{\partial \overline{\mathfrak{G}}}{\partial n}$. Hierbei ist es nicht nothwendig, dass h eine Constante ist.

---

*) *H. v. Helmholtz* und Lord *Rayleigh* sprechen den Reciprocitätssatz für das *Geschwindigkeitspotential* aus, für welches er sich ja auch zunächst ergiebt; zu obiger Fassung gelangt man durch die Erwägung, dass die Schallintensität durch die *Maxima der Verdichtung und Verdünnung* bestimmt ist, welche letzteren ja (wie die oben auf S. 10 angegebene Relation erkennen lässt) der Function u proportional sind.

Die Anwendung des Green'schen Satzes auf eine im betrachteten Gebiete überall endliche Lösung u und die Function $\mathfrak{G}$ ergiebt zunächst:

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\int\int\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{\mathfrak{G}}}{\partial n} - \frac{\partial\bar{u}}{\partial n}\bar{\mathfrak{G}}\right)do;$$

benutzt man nun die Randbedingung $h\bar{\mathfrak{G}} + \frac{\partial\bar{\mathfrak{G}}}{\partial n} = 0$, so ergeben sich die folgenden beiden Formen für die *Lösung der dritten Randwerthaufgabe:*

$$(78)\quad u(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\int\int\left(h\bar{u} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial n}\right)\cdot\frac{1}{h}\cdot\frac{\partial\mathfrak{G}^{x_0 y_0 z_0}_{\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}}}{\partial n}\,do$$

$$= +\frac{1}{4\pi}\int\int\left(h\bar{u} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial n}\right)\mathfrak{G}^{x_0 y_0 z_0}_{\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}}\,do,$$

analog für die Ebene, wo nur $\frac{1}{2\pi}$ statt $\frac{1}{4\pi}$, ds statt do zu setzen ist.

Die *Existenz* der Function $\mathfrak{G}^{x_0 y_0 z_0}_{x\,y\,z}$ lässt sich für ebene Bereiche durch die Erwägung plausibel machen, dass auch eine Membran, deren Rand in dem im § 1 des II. Theiles erörterten Sinne nicht absolut fest ist, durch eine in einem inneren Punkte wirkende periodische Kraft in erzwungene Schwingungen von der Periode dieser Kraft versetzt werden muss. Ausserdem könnte (bei negativem k^2) die in Bezug auf die Function G angestellte Betrachtung über die Wärmeströmung in einer Platte mit der Modification herangezogen werden, dass die Begrenzung an die Umgebung durch Strahlung oder äussere Leitung nach dem bekannten Gesetze Wärme abgiebt.

Auch für die Function $\mathfrak{G}$ gilt der Satz von der Vertauschbarkeit des Argument- und Parameterpunktes und lässt sich bei den Wärmeproblemen in analoger Weise physikalisch deuten, wie es beim Reciprocitätssatz für die erste Green-sche Function ausgeführt wurde. —

Die ganzen vorhergehenden Entwickelungen sind formell unverändert auf den Fall übertragbar, dass $k^2 u$ in der Differentialgleichung *mit einer gegebenen überall endlichen und positiven (analytischen) Function f der Coordinaten multiplicirt* auf-

tritt, weil die hier in Betracht kommenden Singularitäten der Lösungen u in diesem allgemeineren Falle noch dieselben bleiben (cf. III, § 1). Auch die physikalischen Begründungen für die Existenz der verallgemeinerten Green'schen Functionen sind nur darin abzuändern, dass man statt homogener Membranen, Luftmassen und die Wärme leitender Körper *inhomogene* betrachtet (wobei man sich die Inhomogeneität von Luftmassen durch Temperaturunterschiede realisirt denken kann). Auf dieses allgemeinere Problem für *zweidimensionale* Bereiche lässt sich aber auch die Integration *der in krummlinige Coordinaten transformirten Differentialgleichung* $\Delta u + k^2 u = 0$ für ebene oder auch für gekrümmte Flächenstücke zurückführen, wie wir im I. Theile, § 4 gesehen haben. Die Randwerthaufgaben für die Lösungen von $\Delta u + k^2 f \cdot u = 0$ bieten sich daher z. B. dar bei der Bestimmung der durch gegebene Bewegung der Randpunkte erzwungenen Schwingungen einer *gekrümmten Luftschicht* oder bei der Untersuchung der stationären Wärmeströmung in einem ausstrahlenden krummen Flächenstücke, dessen Rand an ein anderes Medium von gegebener Temperaturvertheilung grenzt. (Vergl. IV, § 1.) Dies ist besonders deshalb von Wichtigkeit, weil man von solchen berandeten krummen Flächenstücken zu *geschlossenen* Flächen übergehen kann, wo dann an die Stelle der Randwerthaufgaben das Problem tritt, eine überall sonst stetige Lösung u *aus gegebenen Unstetigkeiten* zu bestimmen; hierauf werden wir am Schlusse dieses Theiles zurückkommen.

b. *k^2 ist ein ausgezeichneter Werth.*

Wir setzen jetzt voraus, dass die Constante k^2 einen der *ausgezeichneten* Werthe für den gegebenen Bereich besitze, d. h. dass es im letzteren überall eindeutige, endliche und stetige, von Null verschiedene Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ gebe, welche an der Begrenzung der Bedingung $\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ oder $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ genügen, je nachdem es sich um die erste, zweite oder dritte

Randwerthaufgabe handelt. Um gleich alle möglichen Fälle zu umfassen, wollen wir annehmen, dass k^2 ein ν-*facher* ausgezeichneter Werth sei, mithin ν von einander unabhängige ausgezeichnete Lösungen vorhanden seien.

In diesem Falle können die im Abschnitte a) eingeführten Functionen G, Γ, $\mathfrak{G}$ mit *einem* Pole *nicht existiren*, was man sich leicht an deren physikalischer Bedeutung klar machen kann. So würde z. B. eine Membran durch eine in einem Punkte x_0, y_0 angreifende periodische Kraft, deren Periode mit derjenigen einer *Eigenschwingung* übereinstimmt, im Allgemeinen in Schwingungen von unbegrenzt wachsender Amplitude versetzt werden, natürlich wenn man, wie es hier immer geschehen muss, von der Reibung, Steifigkeit etc. abstrahirt und annimmt, dass die Differentialgleichung nicht nur für unendlich kleine, sondern noch für beliebig grosse Amplituden gültig bleibe; in dem besonderen Falle aber, wo der Angriffspunkt x_0, y_0 auf einer *Knotenlinie* der besagten freien Schwingungsform läge, würde die Kraft die Schwingungen zwar nicht unendlich verstärken, aber sie überhaupt gar nicht erregen können. Aehnlich verhält es sich bei den durch *eine* punktförmige Schallquelle erregten Schwingungen einer Luftmasse. Um sich die Unmöglichkeit der Existenz der Functionen $G_{xyz}^{x_0 y_0 z_0}$, $\Gamma_{xyz}^{x_0 y_0 z_0}$, $\mathfrak{G}_{xyz}^{x_0 y_0 z_0}$ für ausgezeichnete Werthe k^2 klar zu machen, ist auch, wenigstens wenn es sich um die *erste* Green'sche Function handelt, das Beispiel der in einen horizontalen Rahmen gespannten, mit einer schweren Flüssigkeit bedeckten Membran wohl geeignet. Wird einer solchen Membran durch einen Druck eine gewisse Ausbiegung unter ihre Gleichgewichtslage ertheilt, und dann bis zum Niveau der letzteren eine Flüssigkeit daraufgegossen, so wird nach Aufhebung des Druckes im Allgemeinen entweder die Membran in ihre Gleichgewichtslage zurückkehren (wobei die Flüssigkeit abfliesst), oder die Ausbiegung weiter zunehmen, mathematisch betrachtet bis in's Unbegrenzte, in Wirklichkeit natürlich nur bis zu einer gewissen Grenze, weil bei einer einigermassen beträchtlichen Grösse der Verrückung u die

verticale Spannungscomponente gar nicht mehr durch Δu gegeben ist, also die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ nicht mehr gilt; der erstere Fall wird bei kleinem, der letztere bei grossem specifischen Gewicht der Flüssigkeit eintreten. Es wird aber *ein bestimmtes Verhältniss des specifischen Gewichtes s der Flüssigkeit zur Spannung p der Membran* geben, für welches die Membran bei *jeder beliebigen* Grösse der ursprünglichen Ausbiegung im Gleichgewichte verharrt; dieses Verhältniss $\frac{s}{p}$ ist der *kleinste ausgezeichnete Werth* von k^2, die höheren haben hier keine physikalische Bedeutung. Es ist hiernach klar, dass in dem Falle, wo k^2 jenem ausgezeichneten Werthe gleich ist, jeder hinzukommende Druck die Ausbiegung in's Unbegrenzte wachsen lassen würde; folglich kann die Function $G_{xy}^{x_0 y_0}$, welche die Verrückung bei einem im Punkte x_0, y_0 wirkenden Drucke darstellen würde, nicht existiren. —

Die unter a) erörterte Methode zur Bestimmung der Lösungen u aus den beliebig gegebenen Randwerthen von $\bar{u}$, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ oder $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ ist demnach in dem Falle, wo k^2 ein ausgezeichneter Werth ist, nicht anwendbar. In der That können nun auch, wie wir sogleich sehen werden, in diesem Falle jene Randwerthe *gar nicht beliebig vorgeschrieben* werden, sondern *müssen v Bedingungen genügen*, damit eine endliche und stetige Lösung überhaupt möglich sei; dies wird bei den einzelnen Randwerthaufgaben auch physikalisch erläutert werden. — Ferner aber ist, wenn jene Bedingungen erfüllt sind, die Lösung *nicht vollständig* durch die gegebenen Randwerthe bestimmt, sondern es können die zu dem gegebenen k^2 gehörigen *ausgezeichneten* Lösungen, jede mit einer willkürlichen Constante multiplicirt, hinzuaddirt werden, weil sich ja dadurch die Randwerthe nicht ändern. Auch dies ist bei den physikalischen Problemen, namentlich den Schwingungsproblemen, evident, wie weiter unten ausgeführt werden soll.

Die Lösung der Randwerthaufgaben ist in diesen Fällen, falls nur die gegebenen Randwerthe den erwähnten Be-

dingungen genügen, *dennoch mit Hülfe verallgemeinerter Greenscher Functionen durchführbar*; nur muss man diesen Functionen nicht *einen*, sondern $(\nu + 1)$ *Unstetigkeitspunkte (Pole) von geeigneten Intensitäten* beilegen, worauf ja schon die in § 2 definirte Function Γ der Potentialtheorie, welche zwei entgegengesetzte Pole besitzt, hinweist. Wir werden die hier einzuführenden verallgemeinerten Green'schen Functionen dementsprechend gelegentlich als „$(\nu + 1)$-*fach polare*" bezeichnen. Im Folgenden soll die so modificirte Methode der Green'schen Functionen wieder für die drei Randwerthaufgaben gesondert erörtert werden. Vorausgesetzt wird dabei also immer, dass k^2 ein ν-facher ausgezeichneter Werth für die der gerade betrachteten Randwerthaufgabe entsprechende Grenzbedingung ist. Ein System von linear unabhängigen zugehörigen *Normalfunctionen* des Bereiches soll wie früher mit $u_1, u_2 \ldots u_\nu$ bezeichnet werden.

I. Erste Randwerthaufgabe.

Setzt man in dem Green'schen Satze:

$$\iint \left(\bar{u}' \frac{\partial \bar{u}''}{\partial n} - \bar{u}'' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial n}\right) do = 0$$

bezw.

$$\int \left(\bar{u}' \frac{\partial \bar{u}''}{\partial n} - \bar{u}'' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial n}\right) ds = 0$$

für u' irgend eine im Bereiche überall eindeutige, endliche und stetige Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$, für u'' eine *Normalfunction* u_μ, so folgt, da $\bar{u}_\mu = 0$ ist,

$$(79) \qquad \iint \bar{u} \frac{\partial \bar{u}_\mu}{\partial n} do = 0 \text{ bezw. } \int \bar{u} \frac{\partial \bar{u}_\mu}{\partial n} ds = 0,$$

worin dem Index μ die Werthe $1, 2, \ldots \nu$ beizulegen sind. *Diesen ν Relationen müssen also auch die vorgeschriebenen Werthe $\bar{u}$ genügen, damit sie überhaupt die Randwerthe einer im ganzen Bereiche endlichen und stetigen Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ sein können.*

Diese Bedingungen (79) lassen sich bei den durch Bewegung der Randpunkte erzwungenen Schwingungen einer Membran anschaulich interpretiren. Es muss hier zunächst daran erinnert

werden, dass in dem Falle, wo die allen gestellten Bedingungen genügende Lösung u der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ die Summe mehrerer, mit willkürlichen Constanten multiplicirter Functionen ist, der entsprechende Schwingungszustand aus einer Ueberlagerung ebensovieler verschiedener, *von einander unabhängiger* Schwingungen besteht, welche nicht nur verschiedene Amplituden, sondern auch verschiedene *Phasen* besitzen können; dies gilt nicht nur für die schwingende Membran, sondern für *alle* Schwingungsprobleme. — In dem jetzt betrachteten Falle setzt sich nun die Lösung u zusammen aus einer solchen u', welche die gegebenen Randwerthe $\bar{u}$ besitzt und zugleich mit den letzteren *verschwinden* würde, und aus einer *ausgezeichneten* Lösung $\sum_1^\nu {}_h A_h u_h$, worin $A_1 \ldots A_\nu$ willkürliche Constanten, $u_1 \ldots u_\nu$ die am Rande verschwindenden Normalfunctionen sind. Dementsprechend ist die zugehörige Schwingung der Membran dargestellt durch

$$U = u' \cos \frac{2\pi}{T}(t - t') + \sum_1^\nu {}_h A_h u_h \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_h).$$

Die am Rande der Membran wirkenden Kräfte, welche die Schwingung hervorbringen, leisten im Zeitelement dt die Arbeit

$$Sdt = pdt \int \frac{\partial \overline{U}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \overline{U}}{\partial n} ds = -p \frac{2\pi}{T} dt \int \bar{u}' \sin \frac{2\pi}{T}(t - t')$$

$$\cdot \left\{ \frac{\partial \bar{u}'}{\partial n} \cos \frac{2\pi}{T}(t - t') + \sum_1^\nu {}_h A_h \frac{\partial \bar{u}_h}{\partial n} \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_h) \right\} ds;$$

denn $-p \frac{\partial \overline{U}}{\partial n}$ ist die der in einem Randpunkte angreifenden äusseren Kraft entgegenwirkende Spannungscomponente, $\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} dt$ der vom Angriffspunkt dieser Kraft während dt zurückgelegte Weg, und die rechte Seite des vorstehenden Ausdruckes ergiebt sich mit Rücksicht auf das Verschwinden der Normalfunctionen am Rande. Berechnet man nun die *mittlere* oder die *während einer ganzen Periode T* geleistete Arbeit, d. h.

das Integral $\int\limits_0^T S dt$, so ergiebt sich, dass derjenige Theil dieser Arbeit, welcher der *erzwungenen* Schwingung u' zu Gute kommt, nämlich

$$-\frac{2\pi}{T} p \cdot \int \bar{u}' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial n} ds \cdot \int\limits_0^T \sin \frac{2\pi}{T}(t-t') \cos \frac{2\pi}{T}(t-t')\, dt,$$

verschwindet, und dass somit nur der bei den Eigenschwingungen geleistete Theil der Arbeit übrig bleibt:

$$-\frac{2\pi}{T} p \cdot \sum_1^{\nu}{}^h A_h \int \bar{u}' \frac{\partial \bar{u}_h}{\partial n} ds \cdot \int\limits_0^T \sin \frac{2\pi}{T}(t-t') \cdot \cos \frac{2\pi}{T}(t-t_h)\, dt,$$

worin jetzt wieder $\bar{u}$ statt $\bar{u}'$ geschrieben werden kann. Diese Arbeit muss nun gleich Null sein, da sonst die Eigenschwingungen, welche ja schon für sich fortbestehen, *unbegrenzt verstärkt* werden würden. Soll aber der vorstehende Ausdruck für alle möglichen Amplituden A_h und Phasen $\frac{2\pi}{T} t_h$ verschwinden, so müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$\int \bar{u} \frac{\partial \bar{u}_h}{\partial n} ds = 0, \quad (h = 1, 2 \ldots \nu),$$

d. h. eben diejenigen, welche wir oben aus dem Green'schen Satze ableiteten.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so ist auch *während jedes Zeitelementes* die von den am Rande wirkenden Kräften bei den *Eigenschwingungen* der Membran geleistete Arbeit gleich Null; folglich werden die letzteren dann von den äusseren Kräften *überhaupt nicht beeinflusst.*

Als einfachstes Beispiel für die besprochenen Bedingungen wollen wir den Fall einer kreisförmigen Membran betrachten, deren Rand mit der Periode der *tiefsten* Eigenschwingung (welche einem *einfachen* ausgezeichneten Werthe k^2 entspricht) bewegt wird. Die Bedingung geht dann, da $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n} = k_1 J_0'(k_1 r)$ am ganzen Rande constant ist, in $\int \bar{u}\, ds = 0$ oder $\int\limits_0^{2\pi} \bar{u}\, d\varphi = 0$

über und sagt aus, dass die vorgeschriebenen Verrückungen der Randpunkte so beschaffen sein müssen, *dass der Schwerpunkt der (gleichförmig mit Masse belegt gedachten) Randcurve in seiner Ruhelage verharrt.*

Fortan setzen wir voraus, dass die oben angegebenen ν Bedingungen für die gegebenen Randwerthe $\bar{u}$ erfüllt seien. Dann gelangen wir zur Lösung der Randwerthaufgabe mit Hülfe der $(\nu+1)$-*fach polaren Green'schen Function* $G_{xyz}^{x_0 y_0 z_0, x_1 y_1 z_1, \dots x_\nu y_\nu z_\nu}$, welche abgekürzt mit G_ν bezeichnet werden möge und folgendermassen definirt wird:

G_ν genügt im gegebenen Bereiche der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, wird in $\nu+1$ Punkten $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), \dots (x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ unendlich gross wie $a_0 \frac{\cos kr_0}{r_0}, a_1 \frac{\cos kr_1}{r_1}, \dots a_\nu \frac{\cos kr_\nu}{r_\nu}$ bezw. wie $-a_0 Y_0(kr_0), -a_1 Y_0(kr_1), \dots -a_\nu Y_0(kr_\nu)$, wo $a_0, a_1 \dots a_\nu$ bestimmte Constanten sind, ist sonst überall endlich und stetig und verschwindet an der Begrenzung. — Die Constanten a_μ bestimmen sich, wie wir gleich sehen werden, aus den Werthen der Normalfunctionen $u_1 \dots u_\nu$ in den $\nu+1$ Polen $x_0, y_0, z_0, \dots x_\nu, y_\nu, z_\nu$ bis auf einen Proportionalitätsfactor; dabei wird sich zeigen, dass die Lage der Pole gewissen Beschränkungen unterliegt.

Wendet man den Green'schen Satz

$$\iint \left(\bar{u}' \frac{\partial \bar{u}''}{\partial n} - \bar{u}'' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial n}\right) do = 0$$

auf eine beliebige eindeutige, endliche und stetige Lösung u und die soeben definirte Green'sche Function G_ν an, so ergiebt sich auf bekannte Weise:

$$a_0 u(x_0, y_0, z_0) + a_1 u(x_1, y_1, z_1) + \cdots + a_\nu u(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$$
$$= -\frac{1}{4\pi} \iint \bar{u} \frac{\overline{\partial G_\nu}}{\partial n} do,$$

und eine analoge Gleichung für den Fall der Ebene. Da nun diese Gleichung auch richtig bleiben muss, wenn man für u eine *Normalfunction* u_μ setzt, wodurch das auf der rechten Seite stehende Integral verschwindet, so müssen die Relationen bestehen:

$$
(80) \quad \left| \begin{array}{l} a_0 u_1(x_0, y_0, z_0) + a_1 u_1(x_1, y_1, z_1) + \cdots + a_\nu u_1(x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0, \\ a_0 u_2(x_0, y_0, z_0) + a_1 u_2(x_1, y_1, z_1) + \cdots + a_\nu u_2(x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0 u_\nu(x_0, y_0, z_0) + a_1 u_\nu(x_1, y_1, z_1) + \cdots + a_\nu u_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0; \end{array} \right.
$$

ebenso für die Ebene. *Dies sind die in Aussicht genommenen Gleichungen, welche gestatten, die Constanten $a_0 \ldots a_\nu$ bis auf einen gemeinsamen willkürlichen Factor durch die Werthe der Normalfunctionen $u_1 \ldots u_\nu$ in den Polen auszudrücken*, vorausgesetzt natürlich, dass die Determinante

$$
(81\,\text{a}) \qquad \left| \begin{array}{l} u_1(x_0, y_0, z_0) \ldots u_1(x_{\nu-1}, \cdot\,\cdot) \\ u_2(x_0, y_0, z_0) \ldots u_2(x_{\nu-1}, \cdot\,\cdot) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_\nu(x_0, y_0, z_0) \ldots u_\nu(x_{\nu-1}, \cdot\,\cdot) \end{array} \right|
$$

und die durch cyclische Vertauschung der Pole daraus gebildeten nicht sämmtlich verschwinden. Wollen wir insbesondere die Verhältnisse $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0} \cdots \frac{a_\nu}{a_0}$ berechnen, so müssen wir voraussetzen, dass

$$
(81\,\text{b}) \qquad \left| \begin{array}{l} u_1(x_1, y_1, z_1) \ldots u_1(x_\nu, y_\nu, z_\nu) \\ u_2(x_1, y_1, z_1) \ldots u_2(x_\nu, y_\nu, z_\nu) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_\nu(x_1, y_1, z_1) \ldots u_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu) \end{array} \right| \gtrless 0
$$

ist; dies ist dieselbe Bedingung für die Lage der Pole, welche sich im § 5 des II. Theiles (S. 65) als nothwendig erwies, um eine zu dem ν-fachen ausgezeichneten Werthe k^2 gehörende ausgezeichnete Lösung aus ihren Werthen in den ν Punkten $x_1, y_1, z_1, \ldots x_\nu, y_\nu, z_\nu$ bestimmen zu können. In der That ist die Bedeutung der Bedingung hier ebendieselbe, wie damals, was sich sogleich zeigen wird. —

Es seien jetzt unter Voraussetzung der Ungleichung (81 b) die Grössen $\frac{a_1}{a_0}, \ldots \frac{a_\nu}{a_0}$ aus den ν linearen Gleichungen (80) berechnet; setzt man noch $a_0 = 1$, was keine Beschränkung ist, so erhält man die *Lösung der ersten Randwerthaufgabe* in der Form:

$$u(x_0, y_0, z_0) = -a_1 u(x_1, y_1, z_1) - a_2 u(x_2, y_2, z_2) \dots \tag{82}$$
$$- a_\nu u(x_\nu, y_\nu, z_\nu) - \frac{1}{4\pi} \int\int \bar{u} \frac{\partial \overline{G}_\nu}{\partial n} do,$$

und analog für ebene Bereiche. Man sieht, dass die Function u in einem beliebigen Punkte x_0, y_0, z_0 bestimmt ist durch ihre Werthe an der Begrenzung des Bereiches *und diejenigen in ν festen Punkten im Innern*, nämlich in den Unstetigkeitspunkten, welche der Function G_ν noch ausser x_0, y_0, z_0 beigelegt worden sind. Die Coefficienten a_μ, mit welchen die Werthe von u in jenen ν Punkten multiplicirt erscheinen, sind gemäss ihrer Berechnung aus den ν Gleichungen (80) lineare Functionen von $u_1(x_0, y_0, z_0)$, $u_2(x_0, y_0, z_0)$, ... $u_\nu(x_0, y_0, z_0)$. Wenn mit $A_1, A_2, \dots A_\nu$ neue Grössen bezeichnet werden, welche lineare Functionen der Werthe $u(x_1, y_1, z_1) \dots u(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ sind und ausserdem die Constanten $u_\mu(x_1, y_1, z_1), \dots \mu_\mu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ (wobei $\mu = 1, 2 \dots \nu$ ist) enthalten, *also bei Aenderung des Punktes x_0, y_0, z_0 Constanten sind*, so erhält man demnach für $u(x_0, y_0, z_0)$ die zweite Formel:

$$u(x_0, y_0, z_0) = A_1 u_1(x_0, y_0, z_0) + A_2 u_2(x_0, y_0, z_0) \tag{83}$$
$$+ \dots + A_\nu u_\nu(x_0, y_0, z_0) - \frac{1}{4\pi} \int\int \bar{u} \frac{\partial \overline{G}_\nu}{\partial n} do.$$

Jetzt erscheint der Werth der Function u in einem beliebigen Punkte x_0, y_0, z_0 des Bereiches ausgedrückt durch die Randwerthe von u *und durch die für denselben Punkt genommenen Werthe der zum gegebenen k^2 gehörigen Normalfunctionen.* Es tritt daher klar hervor, dass derjenige Bestandtheil von u, welcher zu dem Oberflächenintegral hinzukommt und nicht durch dieRandwerthe $\bar{u}$, sondern durch die Werthe von u in den *Polen* $x_1, y_1, z_1, \dots x_\nu, y_\nu, z_\nu$ gegeben ist, *eine ausgezeichnete Lösung* für den gegebenen Bereich ist; dass eine solche bei den gegebenen Randwerthen von u noch unbestimmt bleiben musste, war ja von vornherein bekannt. Die obige Bemerkung über die Beschränkung, welcher die Lage der Pole unterliegen muss, hat damit auch ihre Erklärung gefunden; wegen der physikalischen Bedeutung dieser Bedingung im Falle $\nu = 2$ vergleiche man S. 65 und 66. —

Dass es die oben definirte Function G_ν *wirklich giebt*, ist für beliebig begrenzte *ebene* Bereiche dadurch plausibel, dass eine in einen festen Rahmen gespannte Membran durch solche, in inneren Punkten $x_0, y_0, .. x_\mu, y_\mu ..$ angreifende periodische Kräfte, welche bei den Eigenschwingungen der Membran von gleicher Periode zusammengenommen im Mittel (d. h. während einer Periode) *keine Arbeit leisten*, in erzwungene Schwingungen von endlicher Amplitude versetzt werden wird. Damit aber die äusseren Kräfte bei jeder Eigenschwingung von der gegebenen Schwingungsdauer keine Arbeit leisten, müssen im Falle, wo k^2 ein ν-facher ausgezeichneter Werth ist, *in mindestens* $\nu + 1$ *Punkten* $x_0, y_0, \ldots x_\nu, y_\nu$ solche Kräfte angenommen und ihre *Intensitäten*, welche ja mit den Coefficienten $a_0, \ldots a_\nu$ der unendlich gross werdenden Glieder der Entwickelung von G_ν proportional sind, so gewählt werden, dass die Ausdrücke

$$\begin{gathered} a_0 u_1(x_0, y_0) + a_1 u_1(x_1, y_1) + \cdots + a_\nu u_1(x_\nu, y_\nu), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 u_\nu(x_0, y_0) + a_1 u_\nu(x_1, y_1) + \cdots + a_\nu u_\nu(x_\nu, y_\nu) \end{gathered}$$

verschwinden; dieser giebt sich leicht auf Grund einer ganz ähnlichen Betrachtung, wie wir sie oben (S. 292—93) zur Ableitung der Bedingungen für die Randwerthe $\bar{u}$ angestellt haben. Das Verschwinden der vorstehenden Ausdrücke ist aber gerade in den Gleichungen (80), welche die Constanten $a_0, \ldots a_\nu$ der Function G_ν definirten, ausgesprochen. Nur wenn die Punkte $x_0, y_0, \ldots x_\nu, y_\nu$, in denen die Kräfte angreifen, ganz specielle Lagen haben (für welche die sämmtlichen Determinanten (81 b) verschwinden, und somit die Constanten a_μ die Form $\frac{0}{0}$ annehmen), z. B. wenn sie bei allen Eigenschwingungen von der durch k^2 gegebenen Periode *in Ruhe bleiben*, können die Intensitäten der Kräfte *beliebig* sein.

Da Kräfte, welche den erwähnten Bedingungen unterliegen, eine etwa vorhandene Eigenschwingung nicht beeinflussen, so kann in der Schwingungsart, welcher die Function G_ν entspricht, eine *beliebige Eigenschwingung* enthalten sein; *in der Function G_ν bleibt also ein lineares Aggregat der Normal-*

functionen $u_1 \dots u_\nu$ *mit beliebigen constanten Coefficienten unbestimmt*, was übrigens auch aus ihrer mathematischen Definition hervorgeht. Diese Unbestimmtheit von G_ν hat aber auf die mittelst dieser Function gebildete Lösung (82) oder (83) der Randwerthaufgabe keinen Einfluss, weil ja die Randwerthe $\bar{u}$ nach der Voraussetzung den Bedingungen

$$\int \bar{u} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n} ds = \int \bar{u} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial n} ds = \cdots = \int \bar{u} \frac{\partial \bar{u}_\nu}{\partial n} ds = 0$$

genügen, und somit die unbestimmten Glieder von G_ν zum Randintegral $\int \bar{u} \frac{\partial \bar{G}_\nu}{\partial n} ds$ keinen Beitrag liefern. Dasselbe gilt natürlich für räumliche Bereiche.

Dass endlich die Function $u(x_0, y_0)$ durch ihre Randwerthe nur bis auf eine allgemeine ausgezeichnete Lösung bestimmt ist, ergiebt sich bei dem physikalischen Beispiel der durch Bewegung der Randpunkte in Schwingung versetzten Membran daraus, dass die am Rande wirkenden Kräfte, wenn überhaupt eine endliche Schwingung resultiren soll, die Eigenschwingungen *nicht beeinflussen dürfen* (entsprechend den Bedingungen (79)), was zur Folge hat, *dass die durch* $u_1, \dots u_\nu$ (*multiplicirt mit trigonometrischen Functionen der Zeit*) *dargestellten Eigenschwingungen mit beliebigen Amplituden und Phasen neben der erzwungenen Schwingung bestehen können.*

II. Zweite Randwerthaufgabe.

Sind $u_1, \dots u_\mu, \dots u_\nu$ ein System von der Randbedingung $\frac{\partial \bar{u}_\mu}{\partial n} = 0$ genügenden Normalfunctionen des betrachteten Bereiches, so folgt aus dem Green'schen Satze, dass die Randwerthe $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ für jede innerhalb des Bereiches endliche und stetige Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ die ν Relationen erfüllen:

$$(84) \quad \iint \bar{u}_\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} do = 0 \text{ bezw. } \int \bar{u}_\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds = 0, \; (\mu = 1, 2 \dots \nu);$$

soll also eine den Stetigkeitsbedingungen genügende Lösung der zweiten Randwerthaufgabe möglich sein, so müssen für die vor-

gegebenen Werthe $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ *jedenfalls die vorstehenden Gleichungen gelten.*

Diese Bedingungen haben beim Problem der durch periodische Bewegungen der Wandelemente erzwungenen Schwingungen in einem geschlossenen Luftraume (welches ja auf die zweite Randwerthaufgabe führt) wieder die Bedeutung, dass die von den äusseren Kräften, welche jene Bewegung der Wand hervorbringen, bei den Eigenschwingungen der Luftmasse während der Dauer einer Schwingung geleistete Arbeit gleich Null sein muss. Es ist nämlich, wenn wieder $u = u' + \sum^h A_h u_h$ gesetzt und dementsprechend das Geschwindigkeitspotential der Schwingung durch

$$U = u' \cos \frac{2\pi}{T}(t - t') + \sum_1^{\nu}{}^h A_h u_h \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_h)$$

dargestellt wird, $-\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \cos 2\pi \frac{t - t'}{T}$ die nach Innen gerichtete Geschwindigkeitscomponente des Wandelementes, und

$$-\frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{2\pi}{a^2 T}\left\{\bar{u}' \sin \frac{2\pi}{T}(t - t') + \sum_1^{\nu}{}^h A_h \bar{u}_h \sin \frac{2\pi}{T}(t - t_h)\right\}$$

die an demselben vorhandene Verdichtung, also ergiebt sich die während des Zeitelementes dt geleistete Arbeit:

$$Sdt = -\frac{2\pi}{a^2 T} dt \left\{\sin \frac{2\pi}{T}(t - t') \cos \frac{2\pi}{T}(t - t') \cdot \int\int \bar{u}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} do \right.$$
$$\left. + \sum_1^{\nu}{}^h A_h \sin \frac{2\pi}{T}(t - t_h) \cos \frac{2\pi}{T}(t - t') \int\int \bar{u}_h \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} do \right\},$$

und hieraus ist leicht ersichtlich, dass für das Verschwinden von $\int_0^T Sdt$ in der That die ν Bedingungen $\int\int \bar{u}_h \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} do = 0$ nothwendig sind. Sind diese Bedingungen erfüllt, so folgt wieder, dass die Eigenschwingungen durch die erzwungene Bewegung der Wand überhaupt gar nicht beeinflusst werden. — Bei ebenen Bereichen können zu einer analogen Deutung der Bedingungen (84) ausser den erzwungenen

Schwingungen einer geschlossenen Luftplatte auch die unendlich kleinen Schwingungen einer schweren Flüssigkeit in einem cylindrischen Gefässe, welche durch gegebene transversale Schwingungen der Wand erregt werden, herangezogen werden.

Ein specieller Fall der Bedingungen (84) ist die bei der zweiten Randwerthaufgabe in der *Potentialtheorie* auftretende, bereits S. 253 erwähnte Relation $\iint \frac{\partial \overline{V}}{\partial n} do = 0$, welche ja bekanntlich bei den Anwendungen der Potentialtheorie auf Probleme der Hydrodynamik, Wärme- und Elektricitätsleitung die einfache Bedeutung besitzt, dass in den betrachteten geschlossenen Raum eben so viel Flüssigkeit, Wärme oder Elektricität einströmt, wie ausströmt. Bei der Grenzbedingung $\frac{\partial \overline{V}}{\partial n} = 0$ ist in der That $V_1 = \text{Const.}\ (= C)$ eine zu dem einfachen ausgezeichneten Werthe $k^2 = 0$ gehörige Lösung unserer Differentialgleichung; die Relationen (84) gehen also über in

$$\iint C \frac{\partial \overline{V}}{\partial n} do = 0 \quad \text{oder} \quad \iint \frac{\partial \overline{V}}{\partial n} do = 0.$$

Analog verhält es sich natürlich mit der Bedingung $\int \frac{\partial \overline{V}}{\partial n} ds = 0$ für logarithmische Potentiale; dieselbe folgt hier übrigens mathematisch auch daraus, dass V der reelle Theil einer Function complexen Argumentes $V + iW$, also $\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\partial W}{\partial s}$ ist, und dass wegen der Eindeutigkeit von W (bezw. der Stetigkeit von V) nothwendig $\int \frac{\partial \overline{W}}{\partial s} ds = 0$ ist.

Sind nun die Gleichungen (84) erfüllt, so gelangen wir zur Lösung des vorliegenden Problems mit Hülfe einer Function Γ_ν, welche wir folgendermassen definiren:

Die Function $\Gamma_{x\,y\,z}^{x_0 y_0 z_0,\, x_1 y_1 z_1, \ldots x_\nu y_\nu z_\nu}$ *bezw.* $\Gamma_{x\,y}^{x_0 y_0 \ldots x_\nu y_\nu}$, *die wir abgekürzt mit* Γ_ν *bezeichnen, ist eine Lösung der Differentialgleichung* $\Delta u + k^2 u = 0$, *welche in den* $\nu + 1$ *Punkten (Polen)* $x_0, y_0, (z_0), \ldots x_\nu, y_\nu, (z_\nu)$ *unendlich gross wird wie*

$a_0 \frac{\cos k r_0}{r_0}, \cdots a_\nu \frac{\cos k r_\nu}{r_\nu}$ *bezw.* $- a_0 Y_0(k r_0), \ldots - a_\nu Y_0(k r_\nu)$, *welche sonst im betrachteten Bereiche endlich und stetig ist und längs dessen ganzer Begrenzung einen verschwindenden Differentialquotienten* $\frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial n}$ *nach der Normale besitzt. Die Coefficienten* $a_0, \ldots a_\nu$ *müssen den* ν *linearen Gleichungen*

$$a_0 u_\mu(x_0, y_0, z_0) + a_1 u_\mu(x_1, y_1, z_1) + \cdots + a_\nu u_\mu(x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots \nu)$$

genügen, deren erste Unterdeterminanten nicht sämmtlich verschwinden dürfen.

Durch diese Eigenschaften ist die Function Γ_ν bis auf einen Ausdruck $b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_\nu u_\nu$ (mit willkürlichen Coefficienten b) bestimmt, welcher aber (wie zu erwarten ist und weiter unten noch gezeigt wird) bei der Lösung der zweiten Randwerthaufgabe nicht in Betracht kommt in Folge der Relationen $\int\int \bar{u}_\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} do = 0$ oder $\int \bar{u}_\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds = 0$, welchen die gegebenen Werthe $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ nach Voraussetzung genügen. So war auch die zweite Green'sche Function Γ der *Potentialtheorie*, wie wir in § 2, b dieses Theiles sahen, durch die Angabe ihrer zwei Pole und das Verschwinden von $\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial n}$ nur bis auf eine willkürliche additive *Constante* bestimmt, welche aber bei Bildung des Integrals $\int\int \bar{\Gamma} \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} do$ in Folge der Bedingung $\int\int \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} do = 0$ fortfiel. —

Zur Begründung der Einführung der Function $\Gamma_{xyz}^{x_0 y_0 z_0, \ldots x_\nu y_\nu z_\nu}$ sind ganz ähnliche physikalische Betrachtungen anzuwenden, wie sie unter I. angestellt wurden, um die Existenz der $(\nu + 1)$-fach polaren Function G_ν plausibel zu machen; nur ist jetzt statt der Membran, auf welche in den Polen Kräfte wirkten, eine von einer starren Fläche eingeschlossene *Luftmasse* zu betrachten, welche durch in den Polen von Γ_ν befindliche Schallquellen in Schwingungen versetzt wird. Die

Intensitäten der Schallquellen sind entsprechend den Relationen für die a_μ wieder so beschaffen zu wählen, dass die durch $u_1, \ldots u_\nu$ gegebenen Eigenschwingungen nicht verstärkt werden.

Die *Lösung der zweiten Randwerthaufgabe* ergiebt sich jetzt, wenn wieder $a_0 = 1$ gesetzt wird, mittelst der Function Γ_ν in der Form:

$$(85)\begin{cases} u(x_0, y_0, z_0) = -a_1 u(x_1, y_1, z_1) - a_2 u(x_2, y_2, z_2) \cdots \\ \qquad - a_\nu u(x_\nu, y_\nu, z_\nu) + \frac{1}{4\pi}\int\!\!\int \bar{\Gamma}_\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} do \\ \qquad = A_1 u_1(x_0, y_0, z_0) + A_2 u_2(x_0, y_0, z_0) \cdots \\ \qquad + A_\nu u_\nu(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{4\pi}\int\!\!\int \bar{\Gamma}_\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} do, \end{cases}$$

und analog für ebene Bereiche. Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass die Function u durch gegebene Randwerthe von $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ nur bis auf Glieder bestimmt wird, welche eine allgemeine *ausgezeichnete Lösung* von $\Delta u + k^2 u = 0$ für den gegebenen Bereich (bei der Grenzbedingung $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$) bilden und ihrerseits erst *durch die Werthe von u in den Polen* $x_1, y_1, z_1, \cdots x_\nu, y_\nu, z_\nu$ der $(\nu + 1)$-fach polaren Green'schen Function, oder, da ja die Pole $x_1, y_1, z_1, \cdots x_\nu, y_\nu, z_\nu$, abgesehen von der oben unter I. erwähnten Beschränkung, ganz beliebig gewählt werden können, überhaupt durch die Werthe von u in ν beliebigen Punkten des Bereiches gegeben sind. Physikalisch hat dies bei den Luftschwingungen die Bedeutung, dass sich den durch periodische Bewegung der einschliessenden Fläche erregten Schwingungen beliebige *freie* Schwingungen gleicher Periode, — falls es, wie jetzt vorausgesetzt, solche giebt —, überlagern können.

Im Falle $\nu = 1$, d. h. wenn k^2 ein *einfacher* ausgezeichneter Werth ist, ergiebt sich

$$(85')\quad a_1 = -\frac{u_1(x_0, y_0, z_0)}{u_1(x_1, y_1, z_1)},$$

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{u_1(x_0, y_0, z_0) \cdot u(x_1, y_1, z_1)}{u_1(x_1, y_1, z_1)} + \frac{1}{4\pi}\int\!\!\int \bar{\Gamma}_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} do.$$

Diesem Falle ordnet sich, wie wir schon andeuteten, insbesondere die Function Γ der *Potentialtheorie* (cf. § 2, b dieses Theiles) unter; für die Grenzbedingung $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ ist nämlich $k^2 = 0$ ein einfacher *ausgezeichneter* Werth, *da es für ihn die ausgezeichnete Lösung $u_1 = V = Const.$ giebt.* Es ist dann also $u_1(x_0, y_0, z_0) = u_1(x_1, y_1, z_1)$ und man kommt auf die in § 2 angegebene Darstellung zurück:

$$V(x_0, y_0, z_0) = V(x_1, y_1, z_1) + \frac{1}{4\pi}\iint \bar{\Gamma}\frac{\partial \bar{V}}{\partial n}\, do.$$

III. Dritte Randwerthaufgabe.

Dieselbe hat meines Wissens nur bei der Erkaltung eines leitenden Körpers in einer Umgebung von ungleichförmig vertheilter Temperatur eine ungezwungene physikalische Bedeutung (vergl. § 1 dieses Theiles); bei diesem Problem lassen sich aber die Green'schen Functionen nicht so anschaulich deuten, dass man ihre Existenz dadurch auch nur plausibel machen könnte. Wir wollen daher auf die physikalische Interpretation der hier vorliegenden Verhältnisse nicht näher eingehen, sondern uns ausschliesslich auf die Andeutung des zur Lösung der Aufgabe einzuschlagenden Weges beschränken. Doch sei bemerkt, dass man zur Begründung der Existenz der hier einzuführenden $(\nu + 1)$-fach polaren Green'schen Function $\mathfrak{G}_\nu$ (und zur Erklärung der von den gegebenen Randwerthen unabhängigen Glieder der definitiven Lösung) für *zweidimensionale* Gebiete dieselben Betrachtungen in Bezug auf eine Membran mit nachgiebigem Rande (in dem früher erläuterten Sinne) anführen kann, welche in I. für eine Membran mit *festem* Rande angestellt wurden, und dass hiernach die Existenz der entsprechenden Function $\mathfrak{G}_\nu$ auch für beliebige *räumliche* Bereiche in gewissem Grade wahrscheinlich gemacht wird. — Wir sagen jetzt der Reihe nach:

1) Die gegebenen Randwerthe $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ müssen im Falle, wo k^2 ein ν-facher ausgezeichneter Werth ist, also ν von

einander unabhängige, der Grenzbedingung $h\bar{u}_\mu + \frac{\partial \bar{u}_\mu}{\partial n} = 0$ genügende Normalfunctionen $u_1, \ldots u_\mu, \ldots u_\nu$ existiren, die Relationen

$$(86) \quad \iint \left(h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right) \bar{u}_\mu \, do = 0 \text{ bezw. } \int \left(h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right) \bar{u}_\mu \, ds = 0$$

erfüllen, damit überhaupt eine zugehörige, im ganzen Bereiche endliche und stetige Lösung u möglich ist.

2) Wir definiren eine dritte $(\nu + 1)$-fach polare Greensche Function $\mathfrak{G}_\nu = \mathfrak{G}_{x y z}^{x_0 y_0 z_0, \ldots x_\nu y_\nu z_\nu}$ bezw. $\mathfrak{G}_{x y}^{x_0 y_0, \ldots x_\nu y_\nu}$ durch folgende Eigenschaften:

Die Function $\mathfrak{G}_\nu$ erfüllt die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, ist im ganzen Bereiche endlich und stetig mit Ausnahme der Punkte $x_0, y_0, z_0, \ldots x_\nu, y_\nu, z_\nu$ bezw. *$x_0, y_0, \ldots x_\nu, y_\nu$, wo sie unendlich gross wird wie*

$$a_0 \frac{\cos k r_0}{r_0}, \ldots a_\nu \frac{\cos k r_\nu}{r_\nu} \quad \text{bezw.} \quad - a_0 Y_0(k r_0), \ldots - a_\nu Y_0(k r_\nu),$$

und genügt an der Begrenzung überall der Bedingung $h\overline{\mathfrak{G}}_\nu + \frac{\partial \overline{\mathfrak{G}}_\nu}{\partial n} = 0$. Die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_\nu$ werden durch dieselben ν linearen Gleichungen (80) *bestimmt, wie bei den Functionen G_ν und Γ_ν, nur mit dem Unterschiede, dass darin jetzt $u_1 \ldots u_\nu$ die Normalfunctionen für die Grenzbedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ sind.*

Die Function $\mathfrak{G}_\nu$ ist durch vorstehende Definition natürlich nur bis auf ein lineares Aggregat der Normalfunctionen bestimmt, was aber auf das Integral

$$\iint \overline{\mathfrak{G}}_\nu \left(h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right) do \quad \text{oder} \quad \iint \frac{1}{h} \frac{\partial \overline{\mathfrak{G}}_\nu}{\partial n} \left(h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right) do$$

(sowie das analoge Randintegral im Falle der Ebene) ohne Einfluss ist, sofern die Werthe $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ den Bedingungen (86) genügen.

3) Letzteres vorausgesetzt, ergiebt sich folgende *Lösung der dritten Randwerthaufgabe:*

$$
(87)\begin{cases} u(x_0, y_0, z_0) = -a_1 u(x_1, y_1, z_1) - \cdots - a_\nu u(x_\nu, y_\nu, z_\nu) \\ \qquad + \frac{1}{4\pi}\int\int\left(h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right)\overline{\mathfrak{G}}_\nu do \\ \text{oder} \qquad = A_1 u_1(x_0, y_0, z_0) + \cdots + A_\nu u_\nu(x_0, y_0, z_0) \\ \qquad + \frac{1}{4\pi}\int\int\left(h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right)\overline{\mathfrak{G}}_\nu do, \end{cases}
$$

worin man das Oberflächenintegral auch durch

$$
-\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{h}\left(h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right)\frac{\partial \overline{\mathfrak{G}}_\nu}{\partial n} do
$$

ersetzen kann. Für ebene Bereiche sind an den Formeln (87) die bekannten Modificationen anzubringen. —

Es sei noch einmal daran erinnert, *dass im Falle eines negativen h der Grenzbedingung auch ein negatives k^2 ein ausgezeichneter Werth sein,* und somit dann auch bei der Integration der Differentialgleichung $\Delta u - k'^2 u = 0$ die Einführung der Functionen $\mathfrak{G}_\nu$ mit mehreren Unendlichkeitsstellen nothwendig werden kann. —

Hinsichtlich der Uebertragung der in diesem Abschnitte b) angedeuteten Methode zur Lösung der Randwerthaufgaben auf den *Fall der allgemeineren Differentialgleichung* $\Delta u + k^2 f \cdot u = 0$, insbesondere also auf die Integration für Stücke krummer Flächen, gilt dasselbe, was am Schlusse des Abschnittes a) bemerkt wurde.

Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass bisher noch für keinen ganz im Endlichen liegenden Bereich eine der Green-schen Functionen G, Γ, $\mathfrak{G}$ wirklich aufgestellt worden ist.

c. *Unbestimmtheit der Randwerthaufgaben für Gebiete, die sich in's Unendliche erstrecken.*

Die Uebertragung der vorhergehenden Behandlung der Randwerthaufgaben auf Gebiete, die sich *in's Unendliche erstrecken,* unterliegt erheblichen Bedenken, da die zur Begründung unserer Entwickelungen stets benutzten physikalischen Erwägungen hier versagen; denn beispielsweise hat man es bei den Luftschwingungen in unendlich ausgedehnten Räumen in Wirklichkeit nie mit *stehenden* Wellen zu thun. —

Es ist für diese Gebiete jedenfalls noch eine besondere Untersuchung nothwendig, und im Folgenden will ich nur das erörtern, was mir über die hier vorliegenden Verhältnisse ohne Weiteres angebbar zu sein scheint. —

Zunächst ist zu sagen, dass, selbst wenn man die Existenz der Green'schen Functionen für unendlich ausgedehnte Gebiete als sicher annehmen könnte (— etwa auf Grund der Analogie mit dem Halbraum —), die Lösung der Randwerthaufgaben mittelst der Green'schen Functionen, falls $k^2 > 0$ ist, völlig unbestimmt würde; denn für solche Gebiete ist (nach bekannten Beispielen zu schliessen) *jedes* positive k^2 ein *unendlich vielfacher* ausgezeichneter Werth. Man kann sich auch leicht überzeugen, dass der Green'sche Satz

$$\int\!\!\int \left(\bar{u}' \frac{\partial \bar{u}''}{\partial n} - \bar{u}'' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial n}\right) do = 0$$

kein bestimmtes Resultat liefert, wenn man ihn für zwei Particularlösungen $u' = \frac{\cos k r_a}{r_a}$, $u'' = \frac{\cos k r_b}{r_b}$, unter r_a, r_b die Entfernungen von zwei festen Punkten verstanden, auf einen zum Theil unbegrenzten Raum anwendet*). Schliesst man nämlich, entsprechend dem in der Potentialtheorie angewandten Verfahren, den Raum im Unendlichen durch eine Kugelfläche mit unendlich grossem Radius, so ist auf der letzteren

$$\frac{\partial u'}{\partial n} = \frac{\partial u'}{\partial r} = \frac{\partial u'}{\partial r_a}, \quad \frac{\partial u''}{\partial n} = \frac{\partial u''}{\partial r} = \frac{\partial u''}{\partial r_b}$$

zu setzen, also

$$\bar{u}' \frac{\partial \bar{u}''}{\partial n} - \bar{u}'' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial n} = \frac{\cos k\bar{r}_b}{\bar{r}_b} \cdot \frac{k\bar{r}_a \sin k\bar{r}_a + \cos k\bar{r}_a}{\bar{r}_a^2}$$
$$- \frac{\cos k\bar{r}_a}{\bar{r}_a} \cdot \frac{k\bar{r}_b \sin k\bar{r}_b + \cos k\bar{r}_b}{\bar{r}_b^2}.$$

---

*) Die folgende Betrachtung ist ähnlich einer von *H. v. Helmholtz* in der oft erwähnten Arbeit gegebenen; ich habe die letztere hier aber insofern modificirt, dass die Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$, nicht die noch von der Zeit abhängigen Geschwindigkeitspotentiale selbst betrachtet werden.

Hier ist nun $\bar{r}_a - \bar{r}_b$ gegen $\bar{r}_a$ und $\bar{r}_b$ unendlich klein, nämlich gleich der endlichen Grösse $r_{ab} \cos \omega$, wenn man mit r_{ab} den Abstand der Punkte a und b von einander und mit ω den Winkel zwischen ihrer Verbindungslinie r_{ab} und dem Radiusvector r der unendlich grossen Kugel bezeichnet. Berücksichtigt man dies, so ergiebt sich für den über die letztere zu erstreckenden Theil des Integrales

$$\int\!\!\int \left(\bar{u}' \frac{\partial \bar{u}''}{\partial n} - \bar{u}'' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial n}\right) do$$

der Ausdruck

$$k \cdot \int\!\!\int \sin (k r_{ab} \cos \omega) \sin \omega \, d\omega \, d\varphi \, .$$

Man sieht nun, dass derselbe im Allgemeinen nur dann $= 0$ ist, wenn die Integration über die *volle* Kugelfläche, d. h. in Bezug auf ω von 0 bis π und in Bezug auf φ von 0 bis 2π ausgedehnt wird*), also wenn die *ganze* unendlich grosse Kugelfläche als Begrenzung des betrachteten Raumes einzuführen ist. Demnach giebt nur bei Räumen, *deren Begrenzungsflächen ganz im Endlichen liegen*, das über die abschliessende unendlich grosse Kugel genommene Integral *keinen* Beitrag zu $\int\!\!\int \left(\bar{u}' \frac{\partial \bar{u}''}{\partial n} - \bar{u}'' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial n}\right) do$, und ist *nur für solche Räume der Green'sche Satz auf zwei Particularlösungen der betrachteten Art anwendbar.* —

Was wir hier für die letzteren $\left(\frac{\cos k r_a}{r_a} \text{ und } \frac{\cos k r_b}{r_b}\right)$ gezeigt haben, gilt zunächst ebenso, wenn in einer oder in beiden der Cosinus durch den Sinus ersetzt wird, sodann aber auch für irgend zwei Functionen u, die sich aus solchen Particularlösungen durch Summation oder Integration zusammensetzen lassen; es muss dabei jedoch vorausgesetzt werden, dass die Punkte, auf welche sich die einzelnen Particularlösungen beziehen, d. h. in welchen sich letztere wie

---

*) In anderen Fällen kann das obige Integral für besondere Lagen der Punkte a und b verschwinden; beispielsweise tritt dies ein, wenn die sich in's Unendliche erstreckenden Begrenzungsflächen in Bezug auf eine Ebene symmetrisch sind, und die Verbindungslinie r_{ab} zu dieser Ebene senkrecht steht.

$\frac{\cos kr}{r}$ oder $\frac{\sin kr}{r}$ verhalten, alle im *Endlichen* liegen, da man andernfalls über das Verhalten der Function u im Unendlichen gar nichts Allgemeines angeben kann. — Insbesondere ist also die Anwendung der früher zur Lösung der Randwerthaufgaben aufgestellten Formeln, wenn sie *überhaupt* noch statthaft ist, auf solche sich in's Unendliche erstreckende Räume beschränkt, deren Begrenzungsflächen *im Endlichen geschlossen sind,* wobei dann aber auch die oben erwähnte Unbestimmtheit der Lösung eintritt. Ferner gilt z. B. der für die Theorie der Luftschwingungen wichtige *Reciprocitätssatz* der Function Γ nur für Räume der eben bezeichneten Art. — Soll der Green'sche Satz für *beliebige* unendlich ausgedehnte Räume auf zwei Functionen u', u'' anwendbar sein, so müssen $u' \frac{\partial u''}{\partial r}$ und $u'' \frac{\partial u'}{\partial r}$ im Unendlichen von höherer als der 2ten Ordnung unendlich klein werden.

Ganz entsprechend liegen die Verhältnisse bei *ebenen* Bereichen; die obige Entwickelung ist auf dieselben übertragbar, weil sich $Y_0(kr)$ im Unendlichen verhält wie $\frac{C \cos kr + D \sin kr}{\sqrt{kr}}$ (vergl. III, § 2).

Für den *Halbraum* kann man Functionen $G_{xyz}^{x_0 y_0 z_0}$ und $\Gamma_{xyz}^{x_0 y_0 z_0}$, welche den im Abschnitte a) dieses Paragraphen gegebenen Definitionen entsprechen, ohne Weiteres angeben, nämlich

$$G_{xyz}^{x_0 y_0 z_0} = \frac{\cos kr_0}{r_0} - \frac{\cos kr_0'}{r_0'}, \quad \Gamma_{xyz}^{x_0 y_0 z_0} = \frac{\cos kr_0}{r_0} + \frac{\cos kr_0'}{r_0'},$$

wenn r_0, r_0' die Abstände des Punktes x, y, z vom Punkte x_0, y_0, z_0 und von dessen *Spiegelpunkte* in Bezug auf die begrenzende Ebene bezeichnen*). Obwohl nun der Green'sche

*) In der Potentialtheorie lassen sich bekanntlich in analoger Weise durch Einführung „sphärischer Bildpunkte" die Green'schen Functionen G und Γ für die *Kugel* herstellen; diese Uebertragung ist in der Theorie der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ *nicht* möglich, da nach den Entwickelungen in III, § 2 die *Inversion* auf die Functionen u nicht anwendbar ist.

Satz auf den Halbraum nach dem oben Gesagten nicht anwendbar ist, so stellen die Formeln

$$u_{\mathrm{I}} = -\frac{1}{2\pi}\iint \bar{u} \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos k\bar{r}_0}{\bar{r}_0}\right) do$$

$$\text{bezw. } u_{\mathrm{II}} = -\frac{1}{2\pi}\iint \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \cdot \frac{\cos k\bar{r}_0}{\bar{r}_0}\, do,$$

welche nach Analogie von (76) und (77) gebildet sind, und in denen $\bar{r}_0 = \bar{r}_0'$ die Entfernung eines Elementes do der Grenzebene vom Argumentpunkte x_0, y_0, z_0 bedeutet, dennoch Functionen (eigentlich nur Functionszweige) dar, welche selbst, bezw. deren Differentialquotienten nach der Normale an der Grenzebene die vorgeschriebenen Werthe $\bar{u}$ bezw. $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ besitzen. Dies ergiebt sich aus den in III, § 5 abgeleiteten Relationen für eine einfache bezw. Doppelbelegung einer Fläche mit Erregungspunkten. Der oben mit u_{II} bezeichnete Ausdruck ist nämlich das „Geschwindigkeitspotential“ einer die Grenzebene mit der „Dichte“ $\frac{-1}{2\pi}\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ bedeckenden Schicht von *einfachen Erregungspunkten*, es ist also gemäss der Relation (74′)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = -4\pi\sigma = -2\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}.$$

Nun ist hier, weil die belegte Fläche eine *Ebene* ist, in Folge der Symmetrie $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a = -\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i$, folglich $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i$, das ist der Werth von $\frac{\partial u}{\partial n}$ unendlich nahe an der Grenzebene auf der dem betrachteten Halbraume angehörenden Seite derselben, in der That gleich dem gegebenen Werthe $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$. Ganz ähnlich ergiebt sich aus der Unstetigkeit eines Geschwindigkeitspotentials u an einer mit „Doppelquellen“ belegten Fläche, wie es für u_{I} die den Halbraum begrenzende Ebene ist, dass u_1 bei Annäherung an die letztere in die gegebenen Werthe $\bar{u}$ übergeht. —

Die so gewonnenen Ausdrücke u_{I} und u_{II} sind aber nicht die einzigen Lösungen der ersten und zweiten Rand-

werthaufgabe für den Halbraum; vielmehr kann man noch unendlich viele, an der Grenzebene den Bedingungen $\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ genügende Lösungen, die ebenfalls im ganzen Halbraume endlich und stetig sind, zu ihnen hinzuaddiren. Uebrigens müssten wohl die Werthe von $\bar{u}$ und $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ im Unendlichen, wenn man die Formeln für u_{I} und u_{II} gebrauchen will, noch besonderen Beschränkungen unterworfen werden, damit die Integrale u_{I} und u_{II} endliche Werthe besitzen. —

Die *zweite* Randwerthaufgabe für den Halbraum liegt bei dem akustischen Problem der *Aussendung von Luftschwingungen von einer transversal schwingenden unbegrenzten Ebene* vor; allerdings hat man dabei insofern nicht die reine Randwerthaufgabe, als es sich um *gleichmässig fortschreitende* Wellen handelt, und man somit zwei verschiedene Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$, für welche $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ an der Grenzebene die gegebenen Werthe hat, so bestimmen muss, dass sie mit $\cos 2\pi \frac{t}{T}$ bezw. $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ multiplicirt und addirt eine gleichmässig fortschreitende Wellenbewegung darstellen. — In ähnlicher Weise kann als Beispiel für die zweite Randwerthaufgabe für andere sich in's Unendliche erstreckende Gebiete die Aussendung von Schallschwingungen von beliebigen transversal schwingenden Flächen herangezogen werden. Die erwähnte grosse Unbestimmtheit der Aufgabe in diesen Fällen findet ihre physikalische Erklärung dann darin, dass ausser den von der Fläche ausgesandten Wellen beliebige aus dem Unendlichen kommende Wellen, die an der Fläche *reflectirt* worden sind, vorhanden sein können.

d. *Ersetzbarkeit beliebig vertheilter Erregungspunkte durch eine Oberflächen- bezw. Randbelegung.*

In unserem Excurs über Potentialtheorie in § 2 haben wir gesehen, dass man mit Hülfe der Green'schen Function G ein Potential von beliebigen innerhalb einer geschlossenen Fläche befindlichen Massen für äussere Punkte durch das-

jenige einer geeigneten einfachen Massenbelegung jener Fläche ersetzen kann, und ebenso das Potential äusserer Massen auf Punkte innerhalb der geschlossenen Fläche.

In analoger Weise kann man das Geschwindigkeitspotential u beliebiger Erregungspunkte, die innerhalb einer geschlossenen Fläche liegen, für den Aussenraum durch das von einer Belegung jener Fläche mit einfachen Erregungspunkten ausgehende Geschwindigkeitspotential ersetzen.

Um diesen Satz zu beweisen, wende man die Formel

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\int\int \bar{u}\,\frac{\partial \bar{G}}{\partial n}\,do$$

auf den Raum *innerhalb* der geschlossenen Fläche an, indem man für u die Particularlösung $\frac{\cos kr}{r}$ setzt, wo r die Entfernung des Argumentpunktes von u von einem festen, ausserhalb der Fläche liegenden Punkte x', y', z' bezeichnet. Man kann dann $u(x_0, y_0, z_0)$ auffassen als das Geschwindigkeitspotential eines in x_0, y_0, z_0 befindlichen Erregungspunktes für den Punkt x', y', z', der jetzt (nach Ausführung der Integration) als der variabele angesehen wird; dasselbe ist dargestellt durch das Oberflächenintegral

$$-\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{\cos k\bar{r}}{\bar{r}}\,\frac{\partial G_{\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}}^{x_0 y_0 z_0}}{\partial n}\,do,$$

welches als das Geschwindigkeitspotential einer Oberflächenbelegung von einfachen Erregungspunkten mit der von der Lage des Punktes x', y', z' unabhängigen Dichte $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial G_{\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}}^{x_0 y_0 z_0}}{\partial n}$ gedeutet werden kann. — Nachdem so die Ersetzbarkeit *eines einzelnen* Erregungspunktes durch eine einfache Belegung einer ihn umschliessenden Oberfläche erwiesen ist, folgt sie ohne Weiteres auch für die Geschwindigkeitspotentiale (im äusseren unendlichen Raum) beliebiger räumlich vertheilter Schallquellen, die innerhalb einer geschlossenen Fläche liegen.

Hätte man im Vorhergehenden statt G die *zweite* Green'sche Function benutzt, also den Green'schen Satz auf

die Particularlösung $\frac{\cos kr}{r}$ und die Function $\Gamma_{xyz}^{x_0 y_0 z_0}$ angewendet, so wäre man zu dem Resultate gelangt, dass ein einfacher Erregungspunkt hinsichtlich seiner Wirkung auf Punkte des Aussenraumes auch durch eine Belegung einer ihn einschliessenden Fläche mit *Doppelquellen*, wie wir sie im III. Theile (§ 1 und 5) betrachtet haben, ersetzt werden kann; ein Resultat, welches sich wieder auf die Geschwindigkeitspotentiale beliebiger räumlicher Vertheilungen von Erregungspunkten, die ganz innerhalb der betrachteten Fläche liegen, überträgt. — Diese Sätze gelten mit den bekannten Abänderungen (z. B. Ersetzung von $\frac{\cos kr}{r}$ durch $Y_0(kr)$) auch für die *Ebene.*

Aus dem Vorstehenden insgesammt folgt also, *dass man räumlich vertheilte oder in Punkten concentrirte Schallquellen, die man mit einer beliebigen geschlossenen Fläche oder Curve umschliesst, bei Betrachtung der Lösung u in dem die Erregungspunkte nicht enthaltenden, äusseren Theile des Raumes oder der Ebene jederzeit ersetzen kann durch eine Belegung jener Fläche oder Curve mit einfachen Quellen allein oder durch eine solche mit Doppelquellen allein, sofern man die Green'schen Functionen G und Γ für den die ursprünglichen Erregungspunkte enthaltenden Bereich kennt.* (Früher, in § 5 des III. Theiles, (S. 236), konnten wir nur behaupten, dass eine Ersetzung durch eine einfache und eine Doppelbelegung *zugleich* möglich sei.)

Der vorstehende Satz gilt auch noch für Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ mit *höheren* Unstetigkeiten, da letztere successive durch Superposition niederer erzeugt werden können (vergl. III, § 1). Sein zweiter Theil, d. h. die Ersetzbarkeit beliebiger Unstetigkeitspunkte durch die *Doppelbelegung* einer sie umschliessenden Fläche, hat in der Akustik die wichtige physikalische Bedeutung, *dass beliebige Schallquellen hinsichtlich ihrer Wirkung nach Aussen stets durch geeignete transversale Schwingungen einer sie umschliessenden Fläche ersetzt werden können.* — Eine Bemerkung über die als Specialfall im Vorstehenden enthaltene *Aequivalenz einer schwingenden*

Kugelfläche mit in ihrem Mittelpunkte befindlichen vielfachen Schallquellen findet sich in *Rayleigh's* Theorie des Schalles II, p. 284.

Die oben angegebene Ersetzung in eine geschlossene Fläche eingeschlossener Erregungspunkte durch eine einfache oder Doppelbelegung jener Fläche für den Raum ausserhalb der letzteren bedarf einer Ergänzung in dem Falle, wo k^2 ein (ν-facher) *ausgezeichneter* Werth für den umschlossenen Raum ist. Denn in diesem Falle existirt die Function $G_{xyz}^{x_0 y_0 z_0}$ bezw. $\Gamma_{xyz}^{x_0 y_0 z_0}$ nicht, und man muss statt derselben die $(\nu+1)$-fach polare Function G_ν bezw. Γ_ν benutzen. Daher treten zu dem Oberflächenintegral

$$-\frac{1}{4\pi}\iint \frac{\cos k\bar{r}}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{G}}{\partial n}\,do \text{ bezw. } +\frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\overline{\cos k r}}{r}\right)\bar{\Gamma}\,do,$$

durch welches oben $\frac{\cos k r_0}{r_0}$ dargestellt wurde, noch ν Glieder von der Form

$$a_i \frac{\cos k r_i}{r_i}$$

hinzu, worin r_i den Abstand des Punktes x', y', z' des Aussenraumes vom „Pole“ x_i, y_i, z_i der Green'schen Function G_ν oder Γ_ν bezeichnet; die Constanten a_i bestimmen sich durch die Lage der Pole in der im Abschnitte b) erörterten Weise. Ein Erregungspunkt x_0, y_0, z_0 ist also in diesem Falle *nicht durch eine Oberflächenbelegung allein, sondern durch eine solche und ν feste, innerhalb der Fläche befindliche Erregungspunkte,* deren Lage bis zu einem gewissen Grade willkürlich gewählt werden kann, ersetzbar, und *dasselbe gilt für beliebige räumliche Vertheilungen von Erregungspunkten* innerhalb der geschlossenen Fläche.

Damit es möglich wäre, einen Erregungspunkt bezüglich seiner Wirkung im Innern einer geschlossenen Fläche oder Curve, die ihn nicht umschliesst, durch eine einfache oder Doppelbelegung jener Fläche oder Curve zu ersetzen, müsste man die Green'sche Function G oder Γ des *äusseren,* sich in's Unendliche erstreckenden Gebietes kennen; die Anwendung des Green'schen Satzes auf letzteres Gebiet, die

nach dem auf S. 307 Gesagten für die hier in Betracht kommenden Functionen u zulässig wäre, würde dann die verlangte Darstellung liefern. Ob aber für unendlich ausgedehnte Gebiete die Green'schen Functionen überhaupt existiren, muss, wie wir schon zu Anfang von c. bemerkten, vorläufig dahingestellt bleiben.

Ist es nun aus diesem Grunde schon unsicher, ob sich das Geschwindigkeitspotential eines einzelnen, ausserhalb einer geschlossenen Fläche O liegenden Erregungspunktes für das Innere der letzteren durch dasjenige einer Oberflächenbelegung:

$$\int\int \sigma \frac{\cos k\bar{r}}{\bar{r}} \, do$$

ersetzen lässt, so kann man diese Ersetzbarkeit noch viel weniger von einer *beliebigen*, innerhalb O endlichen und stetigen Lösung u behaupten. Denn auf eine solche beliebige Lösung u kann man nicht einmal den Green'schen Satz für den Raum ausserhalb O anwenden, da man gar nicht weiss, wie sie sich im Unendlichen verhält; in der That giebt es ja unendlich viele Lösungen, welche auch im Unendlichen nicht unendlich klein werden, sondern dort alle möglichen Werthe annehmen; man denke nur beispielsweise an die Functionen, welche man durch analytische Fortsetzung der Normalfunctionen des Rechtecks bezw. rechtwinkligen Parallelepipedons erhält. Dagegen würde jene Ersetzbarkeit durch ein Oberflächenintegral zutreffen für Functionen u von der Form $\int\int\int \varrho \frac{\cos kr}{r} \, dv$, falls ϱ nur in einem *endlichen* Theile des Raumes ausserhalb O von Null verschieden ist. —

Man muss eben, da der unendlich ferne Punkt ein höherer singulärer Punkt der *Differentialgleichung* $\Delta u + k^2 u = 0$ ist, darauf verzichten, *allgemeine* Sätze in Bezug auf die Functionen u in unendlich ausgedehnten Gebieten aufzustellen; es bedürfte in jedem Falle einer besonderen Untersuchung über die Voraussetzungen, welche in Betreff der Functionen u gemacht werden müssten.

Nach dem soeben Gesagten sind die Sätze *Mathieu's*, wo-

nach jede beliebige, innerhalb einer geschlossenen Fläche O bezw. Curve S endliche und stetige Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ in der Form $\int\int \sigma \frac{\cos k\bar{r}}{\bar{r}} do$ bezw. $\int \sigma Y_0(k\bar{r}) ds$ darstellbar wäre*), in dieser allgemeinen Fassung sicher nicht richtig. Da diese Sätze in *Mathieu's* kürzlich erschienenes Lehrbuch der Potentialtheorie**) übergegangen sind, so ist es vielleicht nicht überflüssig, auf die Fehler in der Begründung, welche *Mathieu* für die fraglichen Sätze giebt, aufmerksam zu machen.

Zunächst schliesst *Mathieu* aus einer dem Dirichlet'schen Princip analogen Betrachtung, ähnlich wie *H. Weber*, dass die erste Randwerthaufgabe für endliche Bereiche und für Functionen, die der Differentialgleichung $\Delta u - k'^2 u = 0$ (mit reellem k') genügen, stets eine und nur eine Lösung besitze, — ein Satz, den wir zwar nicht auf diesem Wege, aber durch physikalische Betrachtungen als richtig erkannt haben. Um nun eine beliebige, ausserhalb einer geschlossenen Fläche O endliche und stetige Lösung von $\Delta u - k'^2 u = 0$ durch ein über die Fläche O erstrecktes Integral

$$\int\int \sigma \frac{\cos k' i \bar{r}}{\bar{r}} do$$

darzustellen, soll man nach *Mathieu* zunächst eine endliche und stetige Lösung u_1 für das *Innere* der Fläche O herstellen, welche *auf* O mit der ausserhalb gegebenen Function u übereinstimmt; dies ist auf Grund des vorhergehenden Satzes immer möglich. Die Anwendung des Green'schen Satzes auf den von O umschlossenen Raum ergiebt dann

$$0 = \int\int_{(O)} \left(\bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\overline{\cos k' i r}}{r} \right) - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n} \frac{\cos k' i \bar{r}}{\bar{r}} \right) do,$$

falls der Punkt, von dem aus r gerechnet wird, ausserhalb O

*) *E. Mathieu,* Liouville's Journ. (2) XVII, 1872; p. 265. Statt Y_0 benutzt Mathieu eine davon nicht wesentlich verschiedene Function, die er mit N bezeichnet.

**) *E. Mathieu,* Theorie des Potentials. Deutsch von H. Maser. Berlin 1890. Cap. X.

liegt. Andererseits soll dann die Anwendung des Green'schen Satzes auf den Raum ausserhalb O, den man sich durch eine unendlich grosse Kugel abgeschlossen zu denken hätte, die Gleichung

$$u = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(O)}\left(\bar{u}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos k'ir}{r}\right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\frac{\cos k'i\bar{r}}{\bar{r}}\right) do$$

liefern, aus welcher man durch Subtraction der obigen mit Rücksicht darauf, dass $\bar{u} = \bar{u}_1$ ist, erhält:

$$u = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{O}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n}\right)\frac{\cos k'i\bar{r}}{\bar{r}}\, do;$$

dies ist aber die verlangte Darstellung durch ein Oberflächen-integral. —

Diese Herleitung *Mathieu's* ist unhaltbar, weil man, wie schon hervorgehoben wurde, den Green'schen Satz auf sich in's Unendliche erstreckende Räume nicht für *beliebige* Lösungen u anwenden darf, sondern nur für solche, von denen man weiss, dass sie im Unendlichen nebst ihren ersten Ableitungen mindestens von der ersten Ordnung *unendlich klein* werden. Ueber die Function u macht nun *Mathieu* allerdings eine solche Voraussetzung, womit indessen auch die Möglichkeit ausgeschlossen ist, die von ihm für eine *beliebige* Lösung aufgestellte Behauptung zu beweisen. Aber die von ihm benutzte Particularlösung $\frac{\cos k'ir}{r}$ genügt der erwähnten Bedingung keineswegs, sie wird vielmehr für $r = \infty$ unendlich gross wie $\frac{e^{k'r}}{r}$; *Mathieu* hätte statt derselben $\frac{e^{-k'r}}{r}$ nehmen müssen, dann wäre sein Satz für der obigen Voraussetzung unterworfene Functionen u richtig. — Der analoge Beweis *Mathieu's* für die Behauptung, dass die allgemeinste *innerhalb* O den Stetigkeitsbedingungen genügende Lösung von $\Delta u - k'^2 u = 0$ sich durch ein Integral $\iint\limits_{(O)}\sigma\frac{\cos k'i\bar{r}}{\bar{r}}\, do$ darstellen lasse, ist aus ähnlichen Gründen

zu beanstanden: erstens müsste statt $\frac{\cos k'ir}{r}$ die Function $\frac{e^{-k'r}}{r}$ gesetzt werden, zweitens weiss man nicht, wie sich die für den Aussenraum aus den Werthen $\bar{u}_1 = \bar{u}$ auf O construirte Hülfsfunction u_1 im Unendlichen verhält.

Im § 12 des Capitels über das „calorische Potential" sucht *Mathieu* des Ferneren zu beweisen, dass es, ausser für eine Reihe ausgezeichneter Werthe von k^2, für den Raum innerhalb einer geschlossenen Fläche O immer eine und nur eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ mit reellem k giebt, die den Stetigkeitsbedingungen genügt und auf O gegebene Werthe $\bar{u}$ annimmt. Wenngleich dieser Satz mit den von uns aus physikalischen Erwägungen gezogenen Schlüssen im Einklange steht (cf. S. 241, 244), so ist der Mathieu'sche Beweis doch unhaltbar, weil er auf der im Vorstehenden erwähnten unerlaubten Integraldarstellung und auf unbewiesenen Reihenentwickelungen willkürlicher Functionen beruht.

Weiter behauptet nun *Mathieu* noch, dass die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in der Form $\int\int \sigma \frac{\cos k\bar{r}}{\bar{r}} do$ dargestellt werden könne; hiergegen ist einzuwenden, dass man, selbst wenn die zu Grunde gelegte Darstellung für die Lösungen von $\Delta u - k'^2 u = 0$ richtig wäre, darin doch nicht ohne Weiteres k' durch ki ersetzen dürfte. Wir haben oben gesehen, dass vorstehende Behauptung für unendlich ausgedehnte Räume sicher *unrichtig* ist, und für geschlossene Gebiete wird sie es wahrscheinlich auch sein, wenigstens fehlt für sie auch in diesem Falle noch jede Begründung.

Der entsprechende Satz für die Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in der *Ebene*, welchen *Mathieu* ohne Beweis aufstellt, ist natürlich ebensowenig haltbar; denn der unendlich ferne Punkt ist ja in der Ebene ebensowohl, wie im Raume, ein höherer singulärer Punkt der Differentialgleichung.

Was die Behauptung *Mathieu's* betrifft, dass man die Darstellungen $\iint \sigma \frac{\cos k\bar{r}}{\bar{r}} do$ und $\int \sigma N ds$, wo N eine mit $Y_0(kr)$ im Wesentlichen übereinstimmende Function ist, in dem Falle, dass die Begrenzungsfläche bezw. -Curve des Bereiches aus einem Stücke besteht, durch $\iint \sigma \frac{\sin k\bar{r}}{\bar{r}} do$ und $\int \sigma M ds$ (worin $M = J_0(kr)$ ist) ersetzen könne, so ist mir kein Beweis derselben bekannt geworden.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass sich *Mathieu* zur Begründung seiner Behauptung, dass man die allgemeinste innerhalb einer geschlossenen Fläche endliche und stetige Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ in der Form $\iint \sigma \frac{\cos k\bar{r}}{\bar{r}} do$ darstellen könne, in seiner ersten Abhandlung über diesen Gegenstand (Liouv. Journ. (2) XVII, 1872; p. 265) einer Schlussweise bediente, welche derjenigen nachgebildet ist, die *Gauss* zum Beweise des Satzes angewendet hat, dass man ein *Potential* mit auf einer Fläche O beliebig vorgeschriebenen Werthen jederzeit durch das Newtons'che Potential einer Massenbelegung jener Fläche darstellen kann. Diese dem Dirichlet'schen Princip verwandte Schlussweise ist indessen auf Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ noch viel weniger anwendbar, als auf Potentiale. —

§ 5. Strenges Verfahren von Schwarz zur Lösung der ersten Randwerthaufgabe für hinreichend kleine Bereiche; Anwendung der Combinationsmethode bei negativem k^2.

Das Approximationsverfahren von *H. A. Schwarz*, welches, wie wir in II, § 10 erörterten, zur Bestimmung des kleinsten ausgezeichneten Werthes von k^2 und der zugehörigen Lösung von $\Delta u + k^2 f \cdot u = 0$ (worin f eine durchaus positive Function der Coordinaten ist, und $k^2 f$ der Grösse p bei *Schwarz* entspricht) für ebene Bereiche dient, die von einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Linien begrenzt werden, kann auch zur Bestimmung einer ein-

deutigen, endlichen, stetigen Lösung u *aus gegebenen Randwerthen* $\bar{u}$ angewendet werden, wie *H. A. Schwarz* in der schon citirten Abhandlung dargelegt hat. Zu diesem Zwecke muss man nur statt von der Function w_0, die willkürlich war und constant $= 1$ gesetzt wurde, von derjenigen Lösung u_0 der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ ausgehen, welche (ausser den Stetigkeitseigenschaften) *die vorgeschriebenen Randwerthe* $\bar{u}$ *besitzt.* Dass man für Bereiche der angegebenen Art immer eine und nur eine solche Lösung u_0 bestimmen kann, ist durch die in § 2 dieses Theiles erwähnten Untersuchungen von *H. A. Schwarz* und *C. Neumann* erwiesen. Aus dieser Function u_0 leitet man nun in derselben Weise, wie früher $w_1, \ldots w_n \ldots$ aus w_0, nämlich mittelst der Formel (48) S. 163, eine unendliche Reihe von Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$ ab, welche den Differentialgleichungen

$$\Delta u_1 + k^2 f u_0 = 0,\ \Delta u_2 + k^2 f u_1 = 0, \ldots \Delta u_n + k^2 f u_{n-1} = 0, \ldots,$$

sowie den Stetigkeitsbedingungen genügen und *längs des ganzen Randes verschwinden.* Bildet man nun die unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

und bezeichnet, wenn dieselbe convergirt, ihre Summe mit u, so folgt aus der Bildungsweise ihrer Glieder mittelst der Formel (48), dass

$$u - u_0 = \frac{1}{2\pi} \iint k^2 f \cdot u \cdot G\, d\xi\, d\eta$$

ist, und somit $(u - u_0)$ oder auch u selbst der Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 f \cdot u = 0$$

genügt. Ferner besitzt u längs des Randes die vorgeschriebenen Werthe $\bar{u} = \bar{u}_0$, da das Doppelintegral daselbst verschwindet. Demnach stellt die unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots,$$

deren Glieder in der angegebenen Weise gebildet sind, *sofern sie convergirt,* die Lösung der ersten Randwerthaufgabe dar, und es ist dann aus dem Herstellungsverfahren selbst ersichtlich, dass es nur *eine* Lösung giebt.

Es kommt also, um zu erfahren, ob in einem gegebenen Falle das *Schwarz'sche* Lösungsverfahren anwendbar ist, darauf an, ein *Merkmal für die Convergenz* der obigen unendlichen Reihe zu besitzen. — *H. A. Schwarz* hat nun bewiesen, *dass die Reihe unbedingt und gleichmässig convergirt, wenn eine endliche und stetige Lösung w der gegebenen Differentialgleichung existirt, welche im ganzen betrachteten Bereiche, einschliesslich der Begrenzung, nur positive, von* 0 *verschiedene Werthe annimmt.* Nun lässt sich aber zeigen, dass es eine solche Lösung w *stets dann giebt, wenn die in* II, § 10 *eingeführte, für den Bereich charakteristische Constante $c < 1$ ist.* Haben nämlich w_n und W_n die l. c. erklärte Bedeutung, so bleibt bei wachsendem n der Quotient $\frac{w_n}{\sqrt{W_{2n}}}$ stets kleiner als eine endliche Grösse Q, und da $\lim \frac{W_n}{W_{n-1}} = c$ ist, so lässt sich schliessen, dass die unendliche Reihe

$$w_0 + w_1 t + w_2 t^2 + \cdots + w_n t^n + \cdots$$

convergirt, wenn $t < \frac{1}{c}$ ist. Falls nun $c < 1$ ist, so kann man demnach $t = 1$ setzen und erhält durch die convergente Reihe

$$w_0 + w_1 + \cdots + w_n + \cdots$$

eine Lösung von $\Delta u + k^2 f \cdot u = 0$, welche den Stetigkeitsbedingungen genügt, auf dem Rande den Werth $\overline{w}_0 = +1$ hat und auch im Innern des Bereiches nur *positive* Werthe besitzt; letzteres folgt aus der Integraldarstellung (48) in Verbindung mit der Voraussetzung, dass die Function $k^2 f(x, y)$ (p bei *Schwarz*) nur positive Werthe annimmt. — Das Resultat ist also, *dass die Schwarz'sche Approximationsmethode für solche Bereiche und solche Werthe von k^2 anwendbar ist, bei welchen sich die Constante*

$$c = \lim \frac{\iint f w_n \, d\xi \, d\eta}{\iint f w_{n-1} \, d\xi \, d\eta}$$

kleiner als Eins ergiebt. Dies bedeutet gemäss dem in II, § 10 Gesagten nichts Anderes, als dass der Werth von

k^2 *kleiner* sein muss, *als der kleinste ausgezeichnete Werth* für den gegebenen Bereich bei der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$.

Die bei dem Convergenzbeweise von *Schwarz* benutzte Voraussetzung, dass es eine endliche, stetige Lösung u (oder w) gebe, welche innerhalb des betrachteten Bereiches und auf seiner Begrenzung überall > 0 ist, stimmt überein mit derjenigen, unter welcher *Bianchi* die *Eindeutigkeit* der ersten Randwerthaufgabe für die von ihm betrachtete allgemeinste partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus bewiesen hat (cf. § 3 dieses Theiles). Andererseits hat *Picard* (in der ebendaselbst besprochenen Abhandlung*)) als (hinreichende, nicht nothwendige) Bedingung für die Eindeutigkeit des Problems für die speciellere Differentialgleichung $\Delta u + k^2 f \cdot u = 0$ die Ungleichung

$$\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - k^2 f(x, y) > B'^2 + B''^2$$

angegeben, welche für zwei beliebig wählbare, endliche und stetige Functionen B' und B'' im ganzen Bereiche bestehen muss. Nun hat *Picard* im zweiten Theile jener Arbeit gezeigt, dass diese Ungleichung die andere $c < 1$ *zur Folge hat, so dass also die Möglichkeit, zwei ihr genügende Functionen* B', B'' *zu bestimmen, auch hinreichend ist, damit man das Schwarz'sche Lösungsverfahren anwenden kann.* — Dies ergiebt sich folgendermassen. Zwischen den von *Schwarz* eingeführten Integralen

$$W_{n,m} = k^2 \iint f w_n w_m dx dy, \quad W_n = k^2 \iint f w_n dx dy,$$

$$V_{n,m} = V_{m,n} = \iint \left(\frac{\partial w_m}{\partial x} \frac{\partial w_n}{\partial x} + \frac{\partial w_m}{\partial y} \frac{\partial w_n}{\partial y} \right) dx dy$$

bestehen die Relationen**)

$$W_n = W_{n-h,h} = V_{n-h,h+1},$$

wo h irgend eine ganze positive Zahl, die $< n$ ist, bezeichnet. Aus denselben ist ableitbar:

*) Sur une classe d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. Acta math. XII. 1889. p. 323—338.

**) *H. A. Schwarz*, l. c. p. 25, 26.

$$W_{2n} = k^2 \iint f w_n^2 dx dy,$$

$$W_{2n-1} = \iint \left\{ \left(\frac{\partial w_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_n}{\partial y}\right)^2 \right\} dx dy,$$

also

$$W_{2n-1} - W_{2n} = \iint \left\{ \left(\frac{\partial w_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_n}{\partial y}\right)^2 - k^2 f w_n^2 \right\} dx dy.$$

Zu dem Element dieses Doppelintegrales kann man jetzt den Ausdruck

$$\left\{ \left(\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y}\right) w_n^2 + 2B'' w_n \frac{\partial w_n}{\partial x} + 2B' w_n \frac{\partial w_n}{\partial y} \right\} dx dy$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(B'' w_n^2) + \frac{\partial}{\partial y}(B' w_n^2) \right\} dx dy$$

hinzufügen, da das aus diesem Ausdrucke gebildete Doppelintegral durch partielle Integration in ein Randintegral übergeht, welches in Folge der Definition von w_n (wonach $\overline{w}_n = 0$ ist) *verschwindet*; B' und B'' bezeichnen darin zwei willkürliche Functionen, welche nur der Beschränkung unterliegen, nebst ihren ersten Ableitungen endlich und stetig zu sein. Das Element des Doppelintegrals, durch welches $W_{2n-1} - W_{2n}$ dargestellt wurde, wird dann die quadratische Form

$$\left(\frac{\partial w_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_n}{\partial y}\right)^2 + 2B'' w_n \frac{\partial w_n}{\partial x} + 2B' w_n \frac{\partial w_n}{\partial y}$$
$$+ \left(\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - k^2 f\right) w_n^2.$$

Dieselbe ist *definit*, das Integral folglich sicher *nicht negativ*, wenn

$$\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - k^2 f > B'^2 + B''^2$$

ist; können zwei Functionen B', B'' so bestimmt werden, dass im ganzen Gebiete diese Ungleichung erfüllt ist, so gilt demnach

$$W_{2n-1} - W_{2n} \geqq 0,$$

und somit

$$c = \lim \frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} \leqq 1.$$

Nun kann c nicht $= 1$ sein, weil sonst, wie *Schwarz* ge-

zeigt hat, eine im Innern positive, *am Rande verschwindende* Lösung der Differentialgleichung existiren würde, was im Widerspruche stände zu der aus der *Picard*'schen Ungleichung folgenden *Eindeutigkeit* der Randwerthaufgabe. Folglich ist $c < 1$, w. z. b. w. —

Ob nun das *Picard*'sche Kennzeichen für die Anwendbarkeit des Lösungsverfahrens von *Schwarz*, nämlich die Möglichkeit, zwei der angegebenen Ungleichung genügende Functionen B', B'' aufzufinden, praktisch brauchbarer ist, als die directe Auswerthung von c, welche ja allerdings die Herstellung einer unendlichen Reihe von Functionen erfordert, lässt sich allgemein nicht sagen; in besonderen Fällen kann es immerhin wohl der Fall sein.

Wir haben schon in § 3 dieses Theiles gesehen, dass in dem speciellen Falle $f = 1$ die *Picard*'sche Ungleichung immer dann erfüllt ist, wenn der gegebene Bereich ganz innerhalb eines Parallelstreifens von der Breite $\frac{\pi}{k}$, d. h. innerhalb eines Bereiches liegt, für welchen der *kleinste* ausgezeichnete Werth gleich dem gegebenen k^2 ist. Dieses letztere Merkmal für die Anwendbarkeit des *Schwarz*'schen Lösungsverfahrens ergiebt sich übrigens auch für die *allgemeine* Differentialgleichung $\Delta u + k^2 f \cdot u = 0$ direct aus dem Satze von *Schwarz* über die stetige Verkleinerung von c bei stetiger Zusammenziehung der Begrenzung (cf. II, § 11). Denn wenn man weiss, dass das gegebene k^2 der *kleinste* ausgezeichnete Werth ist für einen Bereich, *welcher den gegebenen ganz in sich enthält*, und dass somit die Constante c des ersteren Bereiches den Werth 1 hat, so folgt daraus nach dem erwähnten Satze, dass der gegebene Werth von k^2 kleiner ist, als der kleinste ausgezeichnete Werth des gegebenen Bereiches, oder dass c für letzteren < 1, und somit das Verfahren convergent ist. —

Die Methode von *Schwarz* ist also, allgemein zu reden, nur *auf hinreichend kleine Bereiche* anwendbar*). Ihrer Aus-

*) Unter dieser Beschränkung hat *Picard* im Cap. II der schon erwähnten zweiten Arbeit auch die Integration der allgemeineren

dehnung auf *räumliche* Gebiete würde unter derselben Beschränkung wohl nichts im Wege stehen, und vermuthlich wird sich auch die *zweite* und *dritte* Randwerthaufgabe auf analoge Weise behandeln lassen; es fehlen hierfür nur bisher noch die nöthigen Grundlagen in der Theorie des logarithmischen Potentials.

Im Falle eines *negativen* Werthes von k^2, den wir wieder $= -k'^2$ setzen wollen, ist die *Eindeutigkeit* der ersten Randwerthaufgabe für *beliebig grosse* Bereiche von vornherein sicher; dementsprechend wäre zu erwarten, dass hier das *Schwarz*'sche Lösungsverfahren um so mehr zum Ziele führen müsste. Allein dasselbe kann in diesem Falle nicht unmittelbar angewendet werden, weil es für den Convergenzbeweis wesentlich ist, dass die Functionen, welche die Glieder der unendlichen Reihe bilden, im ganzen Bereiche positiv sind, was sich nur bei durchaus positiven Werthen von $k^2 f(x, y)$ aus Formel (48) schliessen lässt. *Picard* hat daher im Falle $k^2 = -k'^2$ folgenden Weg eingeschlagen*):

Man kann zunächst für *hinreichend kleine* Bereiche die Differentialgleichung

$$\Delta u + k'^2 f \cdot u = 0$$

durch die unendliche Reihe

$$u = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots,$$

welche nach dem *Schwarz*'schen Verfahren gebildet ist, integriren. Bei der Beschränkung auf hinreichend kleine Bereiche ist dieselbe unbedingt convergent; folglich wird die unendliche Reihe

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots$$

dann erst recht convergiren. Die Summe dieser Reihe genügt nun, wie aus der Bildungsweise ihrer Glieder hervorgeht, der partiellen Differentialgleichung $\Delta u - k'^2 f \cdot u = 0$ oder $\Delta u + k^2 f \cdot u = 0$. Man kann demnach zunächst für

---

Differentialgleichung, welche neben Δu die *ersten* Differentialquotienten von u mit beliebigen Coefficienten enthält, mittelst eines völlig analogen Approximationsverfahrens durchgeführt.

*) *Picard*, Acta Math. XII. Abschnitt 7.

solche Bereiche, für welche die *Schwarz*'sche Methode im Falle eines positiven k^2 zum Ziele führt, dieselbe auch anwenden, wenn k^2 *negativ* ist. In letzterem Falle kann man nun aber, wie *Picard* gezeigt hat, von Bereichen der eben bezeichneten Art mittelst des *alternirenden Verfahrens* zu *beliebig grossen*, aus ersteren zusammengesetzten Bereichen fortschreiten, *vorausgesetzt, dass die Function f in der ganzen Ebene positive Werthe hat.* Dies ergiebt sich folgendermassen.

Es gilt zunächst im betrachteten Falle der Satz, dass jede Lösung u, welche auf einer beliebigen geschlossenen Curve C durchaus positiv oder $= 0$ ist, in dem von letzterer umschlossenen Gebiete nicht $\leqq 0$ werden kann; denn andernfalls müsste sie auf irgend einer innerhalb C verlaufenden geschlossenen Curve, und daher, weil es bei negativem k^2 keine ausgezeichneten Lösungen giebt, auch im ganzen Inneren der letzteren $= 0$ sein, was nach der Voraussetzung nicht möglich ist. Ist nun u_0 diejenige Lösung von $\Delta u = 0$, welche dieselben als positiv vorausgesetzten Randwerthe besitzt, wie die Lösung von $\Delta u - k'^2 f \cdot u = 0$, so folgt aus der Formel

$$u - u_0 = -\frac{k'^2}{2\pi}\iint u\, G f dx dy,$$

in Verbindung mit vorstehendem Satze, dass immer $u - u_0 < 0$, also im ganzen Bereiche $u < u_0$ ist.

Es sei nun die Begrenzung des betrachteten Bereiches in zwei Theile L_1 und L_2 getheilt, deren Endpunkte durch eine beliebige Curve L innerhalb des Bereiches verbunden seien, und es sei w eine endliche, stetige Lösung von $\Delta w - k'^2 f . w = 0$, welche auf $L_1 = 1$, auf $L_2 = 0$ ist, sowie w_0 die entsprechende Lösung von $\Delta w = 0$. Dann ist längs der Linie L, wie *Schwarz* gezeigt hat, $w_0 \overline{\overline{<}} q$, wo $q < 1$ ist; da nun im ganzen Bereiche $w < w_0$ ist, so ist längs L auch $w < q$.

Hieraus folgt jetzt, dass für die Lösungen von $\Delta u - k'^2 f . u = 0$ auch der von *Schwarz* für logarithmische Potentiale bewiesene, in § 2, c angeführte Hülfssatz gilt, auf welchem gerade die Anwendbarkeit der Combinations-

methode beruht. Die letztere ist also *im Falle eines negativen* k^2 in der That bei der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 f . u = 0$ anwendbar und ermöglicht in Verbindung mit dem *Schwarz*schen Approximationsverfahren die Lösung der ersten Randwerthaufgabe für alle diejenigen Bereiche, für welche diese Aufgabe in der Theorie des logarithmischen Potentials lösbar ist, d. h. für solche, deren Begrenzung aus einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Linien besteht. —

§ 6. Methode der Reihenentwickelung.

Die Lösung der Randwerthaufgaben in der Theorie der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ nach der Reihenmethode ist noch wenig der Gegenstand der Untersuchung gewesen, wie man sich überhaupt bislang mehr für diejenigen Probleme interessirte, bei welchen die *ausgezeichneten* Lösungen zu bestimmen sind (— Eigenschwingungen, Erkaltungsproblem —), als für solche, bei welchen es auf die Integration der Differentialgleichung bei vorgeschriebenen Randwerthen von $\bar{u}$, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ oder $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ ankommt.

Hinsichtlich des allgemeinen Falles, in welchem die Lösung der Randwerthaufgaben durch Reihenentwickelung überhaupt möglich ist, gilt auch hier diejenige Bemerkung, welche wir in Bezug auf dieselbe Frage in der Potentialtheorie unter e) des § 2, S. 265 gemacht haben; d. h. also, jene Möglichkeit ist vorhanden, wenn der gegebene Bereich durch höchstens 4 Curvenstücke bezw. 6 Flächenstücke von der Art begrenzt wird, dass man Coordinaten ξ, η bezw. ξ, η, ζ einführen kann, von denen je eine auf jedem Stücke der Begrenzung constant ist, und für welche die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ eine Form annimmt, der, eventuell nach Abtrennung eines bestimmten Factors $F(\xi, \eta, \zeta)$ von u, durch Producte von der Form $\Xi_h(\xi)\, \mathrm{H}_i(\eta)$ bezw. $\Xi_h(\xi) \cdot \mathrm{H}_i(\eta) \cdot \mathrm{Z}_k(\zeta)$ genügt werden kann*). Die Randwerthaufgabe (— im All-

*) Ueber eine allgemeine Form einer partiellen Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Variabeln, für welche dies möglich ist, vergl. II, § 8, d, S. 136.

gemeinen, d. h. wenn F nicht $=$ Const. ist, kann man nur die *erste* so behandeln —) ist dann in der S. 265 angegebenen Weise zu zerlegen, und ihre Lösbarkeit beruht in letzter Instanz auf dem S. 71 erwähnten Satze von *Liouville* über die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Function einer Variabeln nach Particularintegralen einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche einen nach dem Oscillationstheorem zu bestimmenden Parameter enthält, — einem Satze, der unschwer auf die Darstellung einer willkürlichen Function von zwei Variabeln durch eine Reihe nach Producten solcher Particularintegrale ausgedehnt werden kann, aber noch eines völlig befriedigenden Beweises entbehrt.

Es sind bisher nur für die Fälle des *Kreises* und des *Kreisringes*, der *Ellipse* und des *Ringgebietes zwischen zwei confocalen Ellipsen*, der *Vollkugel* und der *Kugelschale* die Lösungen durch Reihen aufgestellt worden. — Wir wollen an den Beispielen des Kreises resp. Kreisringsectors und der Kugel die Anwendung der Methode und die Besonderheiten erläutern, welche sich dabei in dem Falle darbieten, wo das gegebene k^2 ein ausgezeichneter Werth ist.

Eine innerhalb eines *Kreises* vom Radius $\bar{r}$ überall endliche und stetige Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ wird, wie wir früher sahen, durch die Reihe

$$u = A_0 J_0(kr) + A_1 J_1(kr)\cos(\varphi - \varphi_1) + \cdots \\ + A_n J_n(kr)\cos n(\varphi - \varphi_n) + \cdots$$

dargestellt. Dieselbe geht für $r = \bar{r}$ in die *Fourier'sche Reihe*

$$A_0 J_0(k\bar{r}) + A_1 J_1(k\bar{r})\cos(\varphi - \varphi_1) + \cdots \\ + A_n J_n(k\bar{r})\cos n(\varphi - \varphi_n) + \cdots$$

über, und diese muss nun mit derjenigen Fourier'schen Reihe

$$a_0 + a_1\cos(\varphi - \alpha_1)\cdots + a_n\cos n(\varphi - \alpha_n) + \cdots$$

übereinstimmen, in welche sich die längs der Peripherie gegebene Function $\bar{u}$ entwickeln lässt*); folglich muss sein

*) Es ist dabei nur nothwendig, dass die gegebene Function $\bar{u}$ sich *formell* in eine Fourier'sche Reihe entwickeln lässt, d. h. dass die Integrale, durch welche die Coefficienten a_n gegeben sind, einen be-

$$A_0 = \frac{a_0}{J_0(k\bar{r})}, \cdots A_n = \frac{a_n}{J_n(k\bar{r})}; \quad \varphi_n = \alpha_n,$$

und die *Lösung der ersten Randwerthaufgabe* ist:

$$\text{(88 a)} \quad \begin{aligned} u = &\frac{a_0}{J_0(k\bar{r})} J_0(kr) + \frac{a_1}{J_1(k\bar{r})} J_1(kr) \cos(\varphi - \alpha_1) \\ &+ \cdots + \frac{a_n}{J_n(k\bar{r})} J_n(kr) \cos n(\varphi - \alpha_n) + \cdots. \end{aligned}$$

Wäre die zweite oder dritte Randwerthaufgabe zu lösen, so hätte man die gegebene Function $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ bezw. $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ in eine Fourier'sche Reihe $\sum_0^\infty {}^n a_n \cos n(\varphi - \alpha_n)$ zu entwickeln und diese der Reihe

$$k \sum_0^\infty {}^n A_n J_n'(k\bar{r}) \cos n(\varphi - \varphi_n)$$

bezw.

$$\sum_0^\infty {}^n A_n (h J_n(k\bar{r}) + k J_n'(k\bar{r})) \cos n(\varphi - \varphi_n)$$

gleichzusetzen; man erhielte also die Lösung

$$\text{(88 b)} \quad u = \sum_0^\infty {}^n \frac{a_n}{k J_n'(k\bar{r})} J_n(kr) \cos n(\varphi - \alpha_n)$$

für die zweite,

$$\text{(88 c)} \quad u = \sum_0^\infty {}^n \frac{a_n}{h J_n(k\bar{r}) + k J_n'(k\bar{r})} J_n(kr) \cos n(\varphi - \alpha_n)$$

für die dritte Randwerthaufgabe.

Bei der Anwendung dieses Verfahrens ist zunächst vorausgesetzt, *dass keiner der Nenner der Coefficienten a_n gleich Null ist.* Wenn letzteres der Fall ist, also z. B. die Gleichung besteht:

---

stimmten Sinn haben; dagegen ist die Convergenz der Reihe für unseren Zweck nicht unbedingt erforderlich, sofern nur die Reihe (88 a) für u in jedem Punkte *innerhalb* des Kreises convergirt. Entsprechendes gilt natürlich für den allgemeinen Fall.

$J_n(k\bar{r}) = 0$ bei der ersten,

$J_n'(k\bar{r}) = 0$ bei der zweiten,

$hJ_n(k\bar{r}) + kJ_n'(k\bar{r}) = 0$ bei der dritten

Randwerthaufgabe, *d. h. wenn k^2 ein ausgezeichneter Werth für die gerade in Betracht kommende Randbedingung ist*, so muss, damit nicht das betreffende Glied unendlich gross wird und somit die Lösung ihre Bedeutung verliert, der entsprechende Coefficient a_n der Fourier'schen Reihe für $\bar{u}$ bezw. $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ oder $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ *verschwinden*; es müssen also die gegebenen Randwerthe u den Bedingungen genügen

$$\int_0^{2\pi} U \cos n\varphi \, d\varphi = 0, \qquad \int_0^{2\pi} U \sin n\varphi \, d\varphi = 0,$$

wo $U = \bar{u}$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ oder $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ zu setzen ist, je nachdem k^2 ein durch die obigen Gleichungen bestimmter ausgezeichneter Werth bei der Grenzbedingung $\bar{u} = 0$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ oder $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ ist. Man erkennt leicht, dass diese Bedingungen für die Randwerthe mit den früher (§ 3, b) auf anderem Wege gefundenen

$$\int \bar{u} \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial n} ds = 0 \quad \text{bezw.} \quad \int \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \bar{u}_n ds = 0$$

$$\text{oder} \int \left(h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right) \bar{u}_n ds = 0$$

identisch sind; denn im vorliegenden Falle gehören zu k^2 zwei Normalfunctionen u_n, welche in einen längs der Peripherie constanten Factor $J_n(k\bar{r})$ und den Factor $\cos n\varphi$ bezw. $\sin n\varphi$ zerfallen.

Sind die angeführten Bedingungen für die Randwerthe erfüllt, so bleibt die durch die Reihen (88a, b, c) gegebene Lösung gültig, die Reihen enthalten aber, weil sowohl A_n, als $\operatorname{tg} n\varphi_n$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt*), zwei Glieder

---

*) Jedes Glied der Reihen für u, ausgenommen das erste (mit dem Index $n = 0$), ist für *zwei* zu zählen, da es ja die beiden verfügbaren

mit *willkürlichen Coefficienten*, wie es ja nach unseren früheren allgemeinen Betrachtungen sein muss.

Wäre k^2 allgemein ein ν-facher ausgezeichneter Werth, so müssten in der Fourier'schen Reihe für U natürlich nicht nur zwei, sondern ν Glieder verschwinden, und ebenso viele Glieder in der Reihe, welche die Lösung u darstellt, würden unbestimmt. Wie man sieht, gelangt man bei Anwendung der Reihenmethode hinsichtlich des Falles, wo k^2 ein ausgezeichneter Werth ist, zu genau denselben Resultaten, welche wir bereits bei der Methode der Green'schen Functionen gefunden hatten. — Die eben erörterten Verhältnisse bei der Lösung durch Reihen hat zuerst *Mathieu**) hervorgehoben; dass sie auch bei der dritten Randwerthaufgabe in der Potentialtheorie eintreten können, wenn das h der Grenzbedingung *negativ* ist, hat *Dini* bemerkt, wie schon in § 2 dieses Theiles (S. 266) erwähnt wurde.

Soll die erste oder zweite Randwerthaufgabe für einen *Kreisringsector* gelöst werden, so hat man zunächst eine Reihe von der Form

$$\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \left(A_\nu J_\nu(kr) + A_{-\nu} J_{-\nu}(kr)\right) \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} (\nu\varphi),$$

worin $\nu = \frac{n\pi}{\gamma}$, n eine ganze Zahl und γ der Winkel des Sectors ist, anzusetzen. Je nachdem man den Factor $\sin\nu\varphi$ oder $\cos\nu\varphi$ wählt, verschwindet die durch diese Reihe dargestellte Function u' selbst oder ihre Derivirte nach der Normale auf den begrenzenden *Radien*; die Coefficienten A_ν, $A_{-\nu}$ können dann so bestimmt werden, dass für die begrenzenden *Kreisbögen*, auf denen $J_\nu(kr)$ und $J_{-\nu}(kr)$ constant sind und die Reihe also in eine Fourier'sche übergeht, ent-

---

Constanten A_n und φ_n enthält; in der That hätte statt $A_n \cos n(\varphi - \varphi_n)$ ebensogut $A_n' \cos n\varphi + B_n' \sin n\varphi$ gesetzt werden können. Dasselbe gilt natürlich von der Fourier'schen Reihe für U.

*) *E. Mathieu:* Sur la définition de la solution simple. Compt. Rend. LXXXVI, 2, 1878. p. 962—965.

weder u' oder $\frac{\partial u'}{\partial n}$ gegebene Werthe annimmt. Zu dieser Reihe u' hat man sodann eine andere u'' von der Form

$$\sum_0^\infty {}^\nu (A_\nu J_\nu(kr) + A_{-\nu} J_{-\nu}(kr)) \cdot \cos \nu(\varphi - \varphi_\nu)$$

hinzuzufügen, worin aber die Indices ν und die Verhältnisse $A_\nu : A_{-\nu}$ so zu bestimmen sind, dass alle Reihenglieder, bezw. ihre ersten Ableitungen nach r, auf den beiden *Kreisbögen* verschwinden, und die Coefficienten A_ν selbst, sowie die Constanten φ_ν so, dass die obige Reihe oder die aus ihr durch Differentiation nach φ abgeleitete *längs der begrenzenden Radien* mit einer gegebenen Function von r $\left(\bar{u}'' \text{ bezw. } r\frac{\partial \bar{u}''}{\partial n}\right)$ übereinstimmt. Dass die verlangte Bestimmung von ν und $A_\nu : A_{-\nu}$ in u'' möglich ist, folgt aus den Sätzen von *Sturm* (dem *Oscillationstheorem*, cf. II, § 6, a, sowie auch S. 117—118), angewendet auf die Differentialgleichung (26), welcher $A_\nu J_\nu(kr) + A_{-\nu} J_{-\nu}(kr)$ genügt. Die Ordnungszahlen ν würden *rein imaginär* zu wählen sein, damit die Anwendung jener Sätze möglich ist, da hier $-\nu^2$ an die Stelle des k^2 in (23'), S. 68, tritt; man erhielte also eine Entwickelung einer willkürlichen Function von r nach Bessel'schen Functionen mit rein imaginären, durch transcendente Gleichungen bestimmten Ordnungszahlen ν bei constantem k, im Gegensatz zu den nach den Wurzeln k von $J_n(k\bar{r}) = 0$ etc. fortschreitenden Reihen, die wir in II, § 7 kennen lernten. Die Möglichkeit dieser Entwickelung, d. h. der oben erwähnten Bestimmung von A_ν und φ_ν in der Reihe u'', folgt sodann aus dem zu Anfang dieses Paragraphen angeführten Satze von *Liouville*.

Für bestimmte Werthe von k^2 können einzelne Glieder der Reihe für u' auf den beiden Kreisbögen *verschwinden* und somit *unbestimmte* Coefficienten A_ν behalten; diese Glieder sind dann *ausgezeichnete* Lösungen für den betreffenden Ringsector. Dagegen kann die Reihe für u'' *keine* ausgezeichneten Lösungen enthalten, weil $\cos \nu(\varphi - \varphi_\nu)$ bei imaginärem ν nicht für zwei reelle Werthe von φ verschwinden kann. —

Die *dritte* Randwerthaufgabe lässt sich *nicht* durch

Reihen von der angegebenen Form lösen, weil man der Bedingung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0$ längs der Radien nicht genügen kann; es müsste, damit das gleiche Verfahren anwendbar wäre, auf der letzteren nicht $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$, sondern $h\bar{u} + r\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ gegeben sein.

Der allgemeine Fall, für welchen das Vorstehende ein Beispiel gab, würde bei ebenen Bereichen folgender sein, falls es sich um die *erste* Randwerthaufgabe handelt. Man erhielte durch Einführung solcher Coordinaten, von denen je eine auf einer Begrenzungscurve constant ist, eine partielle Differentialgleichung von der Form (43), S. 136. Dieselbe soll durch Reihen von der Form

$$\sum^{a}(A_a X_a + A_a' X_a')(B_a Y_a + B_a' Y_a')$$

integrirt werden, worin X_a, X_a' und Y_a, Y_a' Particularlösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen (43′) sind. Den Parameter a und das Verhältniss $A_a' : A_a$ hätte man zunächst für jedes Glied so zu bestimmen, dass $A_a X_a + A_a' X_a'$ auf den Begrenzungscurven $x = \text{Const.}$ verschwindet, und dann die Coefficienten B_a, B_a' (oder eigentlich ihre Producte mit A_a, dessen absoluter Werth ja noch unbestimmt geblieben ist) so, dass die Reihe längs der Curven $y = \text{Const.}$ die dort gegebenen willkürlichen Functionen $\bar{u}(x)$ darstellt; ersteres ist nach dem Oscillationstheorem, letzteres nach dem mehrfach erwähnten Satze von *Liouville* möglich. Zu der so erhaltenen Reihe ist eine zweite hinzuzufügen, worin die Constanten a und $B_a' : B_a$ gemäss der Bedingung, dass $B_a Y + B_a' Y'$ auf den Curven $y = \text{Const.}$ verschwindet, zu bestimmen sind, und dann die Coefficienten A_a und A_a' (multiplicirt mit B_a) so, dass die Reihe auf den Grenzcurven $x = \text{Const.}$ die gegebenen Functionen von y darstellt*). Die Parameter a

*) Dass wir hier die Aufgabe nur in *zwei*, statt, wie es dem S. 265 angegebenen Verfahren entspräche, in *vier* speciellere Aufgaben zerlegt haben, ist, wie man ohne Weiteres erkennen wird, ein rein äusserlicher Unterschied.

der einen Reihe werden immer *positiv*, die der anderen *negativ* sein, vorausgesetzt, dass a_{11} und a_{22} in (43) gleiche Vorzeichen haben. — Die Summe der beiden so gewonnenen Reihen ist dann die verlangte Lösung der ersten Randwerthaufgabe. Wie bei der zweiten Randwerthaufgabe zu verfahren ist, kann man leicht aus dem oben besprochenen Beispiele ersehen.

Von ebenen Bereichen sind ausser dem Kreis und Kreisring noch die Fläche einer Vollellipse und das Ringgebiet zwischen zwei confocalen Ellipsen von *Mathieu* behandelt worden*), welcher jedoch die Lösung für diese letzteren Fälle nicht vollständig durchgeführt, sondern eigentlich nur gezeigt hat, dass man dabei Entwickelungen nach den Functionen des elliptischen Cylinders zu benutzen hat.

Was die Integration durch Reihen für *Gebiete im Raume von drei Dimensionen* betrifft, so ist sie bisher nur auf die Vollkugel und Kugelschale angewendet worden, ist übrigens aber auch für rechtwinklige Parallelepipeda leicht durchführbar. Für die Vollkugel gestaltet sie sich, wie beim vollen Kreise, sehr einfach. Bezeichnet man nämlich mit S_n eine allgemeine Kugelflächenfunction n^{ten} Grades (im engeren Sinne), so ist, wie aus II, § 7 hervorgeht, die gesuchte Lösung der Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in Polarcoordinaten von der Form

$$u = \sum_0^\infty {}^n A_n \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} \cdot S_n.$$

Sind nun die auf der Kugeloberfläche $r = \bar{r}$ gegebenen Werthe von $\bar{u}$ bezw. $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ durch die Reihe nach Kugelflächenfunctionen

$$\sum_0^\infty {}^n a_n S_n$$

dargestellt, so ergiebt sich durch Vergleichung der Coefficienten für die erste Randwerthaufgabe die Lösung

*) *E. Mathieu,* Mémoire sur l'intégration des équations aux diff. part. de la phys. math., Liouv. Journ. (2) XVII p. 249—323. 1872.

$$u = \sum_0^\infty {}^n a_n \frac{\sqrt{\bar r}}{J_{n+\frac{1}{2}}(k\bar r)} \cdot \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} \cdot S_n,$$

und für die zweite:

$$u = \sum_0^\infty {}^n \frac{a_n}{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}\right)_{r=\bar r}} \cdot \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} S_n;$$

wäre drittens:

$$h\bar u + \frac{\partial \bar u}{\partial n} = \sum_0^\infty a_n S_n$$

gegeben, so würde der Nenner von a_n lauten:

$$h \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k\bar r)}{\sqrt{\bar r}} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}\right)_{r=\bar r}.$$

Diese Behandlungsweise der Randwerthaufgaben für die Kugel ist zur Lösung verschiedener *physikalischer Probleme* benutzt worden, so von *Stokes**) in seiner schönen Arbeit „On the Communication of vibration from a vibrating body to a surrounding gas", wo die obige Reihenentwickelung allerdings für den Raum *ausserhalb* der Kugelfläche aufgestellt wird. In ähnlicher Weise hat *Clebsch***) die Reflexion ebener Wellen in einem beliebigen elastischen Medium an einer starren Kugelfläche behandelt, ein Problem, welches im Wesentlichen auf dasjenige der *Aussendung* von Schwingungen von der Kugelfläche zurückkommt. Auf diese Arbeiten kann hier jedoch nicht näher eingegangen werden, weil in ihnen stets *fortschreitende* Wellen in unendlich ausgedehnten Räumen betrachtet werden.

Wie die Reihen, welche die Lösung für die Ellipsenfläche in der Ebene liefern, nach Producten aus „Functionen des elliptischen Cylinders", welche Grenzfälle der gewöhnlichen Lamé'schen Functionen sind, fortschreiten, so sind

---

*) *Stokes*, Phil. Transactions 1868; *Rayleigh's* Theorie des Schalles, Cap. XVII.

**) *Clebsch*, Crelle's Journal LXI, p. 195—262. 1862.

die Glieder derjenigen Reihen, welche zur Lösung der Randwerthaufgaben für von sechs confocalen Flächen zweiten Grades begrenzte räumliche Bereiche anzuwenden wären, *Grenzfälle der Lamé'schen Producte des Raumes von vier Dimensionen*, wie wir schon in II, § 8, c (S. 134) sahen. Um die Randwerthaufgaben für Raumgebiete der genannten Art zu lösen, würde man sechs solche Reihen zu superponiren haben, von denen jede einzelne an fünf Begrenzungsoberflächen verschwindende, an der sechsten vorgeschriebene Werthe von u oder $\frac{\partial u}{\partial n}$ lieferte. Dies wäre durch geeignete, d. h. auf dem Oscillationsprincipe beruhende Bestimmung der Parameter B, C in der Differentialgleichung (42) und der in jedem einzelnen Producte noch verfügbaren vier Constanten in ganz analoger Weise zu erreichen, wie es oben für ebene Bereiche allgemein erörtert wurde.

§ 7. Integration für geschlossene Flächen bei gegebenen Unstetigkeiten.

Stellt man sich vor, dass die Randcurve, durch welche man zunächst ein Stück einer geschlossenen Fläche ausgeschnitten hatte, und längs welcher die Werthe von $\bar{u}$ oder $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ oder $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ vorgeschrieben waren, sich auf einen Punkt zusammenzieht, und dass somit das Gebiet, für welches die Lösung u zu bestimmen ist, ein *geschlossenes* wird, so fragt es sich, was dabei aus den Randwerthaufgaben wird oder an ihre Stelle tritt. Man kann natürlich nicht in unendlicher Nähe des Punktes, in welchen sich der Rand zusammenzieht, noch alle die ursprünglich auf letzterem vertheilten Randwerthe vorschreiben, sondern wird verlangen, dass u in jenem Punkte *stetig* bleibt; demnach kann man höchstens noch einen bestimmten Werth von u oder bestimmte Werthe der ersten Derivirten nach den Coordinaten vorschreiben. Im Uebrigen *muss die Lösung der Differentialgleichung auf einer geschlossenen Fläche, sofern sie eindeutig sein soll, durch ihre gegebenen Unstetigkeiten bestimmt sein.*

Die Theorie des *logarithmischen Potentials* auf beliebigen geschlossenen Flächen ist von *F. Klein* in physikalischer Form entwickelt worden*), wodurch für functionentheoretische Zwecke (Abel'sche Integrale), die uns hier nicht interessiren, eine besonders anschauliche Grundlage gewonnen ist. — Die Sache gliedert sich in ihren Hauptzügen so:

Die logarithmischen Potentiale auf krummen Flächen lassen sich veranschaulichen durch die *stationäre elektrische Strömung*, welche bei gegebenen Zuleitungs- resp. Ableitungsstellen in der leitend gedachten Fläche eintritt. Aus dieser physikalischen Bedeutung folgt die Existenz einer „*Hauptfunction*" $H_{pq,p'q'}^{p_1 q_1, p_1' q_1'}$, welche in zwei Punkten p_1, q_1; p_1', q_1' unendlich gross wie $\log r_1$ resp. $-\log r_1'$ wird, eindeutig und, ausser in jenen zwei Punkten, überall endlich und stetig ist, und an der Stelle p', q' verschwindet; dieselbe besitzt die Eigenschaft, ihren Werth nicht zu ändern, wenn man die Punkte p, q; p', q' mit p_1, q_1; p_1', q_1' vertauscht. Ein Grenzfall von $H_{pq,p'q'}^{p_1 q_1, p_1' q_1'}$ ist die Function $L_{pq,p'q'}^{(p_1 q_1)}$, welche an der Stelle p_1, q_1 einen Unstetigkeitspunkt zweiter Ordnung (physikalisch zu deuten als Doppelquelle oder magnetisches Molekül), der entstanden ist durch Zusammenrücken der beiden einfachen Unstetigkeitspunkte p_1, q_1 und p_1', q_1', besitzt. Wie man aus der Function H die *Green'schen Functionen* eines *berandeten* ebenen Flächenstückes ableiten kann, indem man dasselbe als *doppelt überdeckt* und somit als geschlossene Fläche betrachtet, haben wir schon in § 2 dieses Theiles gesehen. — Durch Aneinanderreihung von Unstetigkeitspunkten zweiter Ordnung (magnetischen Molekülen oder elektromotorischen Linienelementen) zu Linien senkrecht zu den Axen der „magnetischen Moleküle" gelangt man zu Potentialen mit *Wirbelpunkten*, und auf mehrfach zusammenhängenden Flächen, wo man derartige elektro-

*) *F. Klein*, Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale, eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen; Leipzig, 1882; ferner in dessen Vorlesung über Potentialtheorie, II. Theil, Sommersemester 1888.

motorische Linien als in sich zurücklaufend annehmen kann, ohne durch dieselben die Fläche in getrennte Stücke zu zerschneiden, zu überall endlichen, *durch Periodicitätsmoduln unendlich vieldeutigen* Potentialen. —

Aehnliche Betrachtungen lassen sich nun über die *Integrale der in krummlinige Coordinaten transformirten Differentialgleichung* $\Delta u + k^2 u = 0$ *auf geschlossenen Flächen* anstellen, worauf ja schon am Schlusse des III. Theiles hingewiesen wurde. Hierzu ist jedoch Folgendes vorab zu bemerken:

Während ein logarithmisches Potential auf irgend einer geschlossenen Fläche vermöge der conformen Abbildung ohne Weiteres auch ein solches auf einer über der Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Fläche liefert, würde man hier aus der Lösung einer solchen Differentialgleichung, welche zufolge I, § 1a, S. 9, die Form hat:

$$(89)\qquad \frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{G\frac{\partial u}{\partial p} - F\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} + \frac{\partial}{\partial q}\left\{\frac{-F\frac{\partial u}{\partial p} + E\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} + k^2 f(p,q)\sqrt{EG-F^2}\cdot u = 0,$$

für eine geschlossene krumme Fläche vielmehr diejenige einer *anderen*, in dem Factor f abweichenden Dfferentialgleichung für die entsprechende Riemann'sche Fläche über der Ebene erhalten, *weil sich bei der conformen Abbildung der Factor von* u *in der Differentialgleichung ändert* (cf. I, § 4).

Physikalische Probleme, welche hier zur Deutung der Functionen u herangezogen werden können, sind einerseits bei positivem k^2 die *Schwingungen in sich geschlossener sehr dünner Luftschichten*, andererseits bei negativem k^2 die *stationäre Wärmeströmung in einer gegen die Umgebung von der Temperatur* 0 *frei ausstrahlenden geschlossenen Fläche;* die oben mit $f(p, q)$ bezeichnete Function ist in beiden Fällen überall positiv. —

Was zunächst den zweiten Fall (mit negativem k^2) betrifft, so gilt hier, wie in der Potentialtheorie, der Satz, *dass eine auf einer geschlossenen Fläche überall eindeutige, endliche und stetige Lösung nothwendig eine* C o n s t a n t e *ist*, jedoch mit dem wich-

tigen Unterschiede, *dass diese Constante hier* $= 0$ *sein muss*, indem ja eine andere Constante der Differentialgleichung nicht genügt. Dementsprechend ist eine Lösung u hier *vollständig bestimmt, wenn ihre Unstetigkeiten gegeben sind.* Unstetigkeitspunkte erster Ordnung können in beliebiger Zahl und mit beliebigen Intensitäten vorgeschrieben werden, insofern bei beliebig gegebenen Wärmezuleitungs- und Ableitungsstellen stets eine stationäre Wämeströmung eintreten wird. Insbesondere existirt immer eine Hauptfunction $H_{pq}^{p_0 q_0}$ mit *einem* Unstetigkeitspunkte. Zu Lösungen mit Unstetigkeiten höherer Art würde man analog wie beim logarithmischen Potential durch einen Grenzübergang gelangen. Ueber *mehrdeutige* Lösungen lässt sich aus dem genannten physikalischen Vorgange direct nichts erschliessen; jedenfalls kann es aber, wie überhaupt bei unserer Differentialgleichung, *keine unendlich vieldeutigen Lösungen mit constanten Periodicitätsmoduln* geben.

Ist k^2 *positiv*, so verhält es sich im Allgemeinen ebenso, wie eben erörtert wurde. Allein für eine Reihe discreter Werthe k^2, nämlich für die im II. Theil betrachteten *ausgezeichneten* Werthe, giebt es *auf der Fläche überall endliche und stetige, eindeutige*, nicht überall verschwindende Functionen u; eine Lösung der Differentialgleichung ist dann also auch *nicht* vollständig bestimmt, wenn ihre Unstetigkeiten gegeben sind. Auch können die letzteren *nicht beliebig* vorgeschrieben werden, wie man im physikalischen Bilde sieht, da beliebige Schallquellen von der Periode eines Eigentones der Luftschicht im Allgemeinen *Schwingungen von unbegrenzt wachsender Amplitude erzeugen müssten.* Beschränken wir uns auf Unstetigkeitspunkte erster Ordnung, d. h. einfache Schallquellen, so müssen dieselben so vertheilt, resp. ihre Intensitäten so bemessen sein, dass durch die in ihnen wirkenden Kräfte bei den Eigenschwingungen von gleicher Periode im Mittel keine Arbeit geleistet wird, was sich mathematisch durch analoge Bedingungen für die „Intensitäten" a_ν ausdrücken würde, wie bei berandeten Bereichen (vgl. IV, § 4, b); diese Bedingungsgleichungen würde man hier durch Anwendung des Green'schen Satzes auf

die ganze, durch geeignete Schnitte einfach zusammenhängend gemachte Fläche erhalten. — Für die *Kugelfläche* vom Radius Eins sind im Falle $k^2 = n(n+1)$ die *Kugelflächenfunctionen zweiter Art* von der n^{ten} Ordnung, welche *Heine* (Handbuch der Kugelfunctionen) untersucht hat, Lösungen mit Unstetigkeitspunkten, die jenen Bedingungen genügen. Beispielsweise ist für den ausgezeichneten Werth $k^2 = 2$ (wo also $n = 1$ ist) keine Lösung mit nur *einem* einfachen Unstetigkeitspunkte möglich, sondern es müssen mindestens *zwei* entgegengesetzte, in den Endpunkten eines Durchmessers liegende Unstetigkeitspunkte vorhanden sein, wie sie in diesem Falle die Kugelflächenfunction zweitre Art Q_0 besitzt. — Nach dem Vorstehenden ist auch klar ersichtlich, weshalb wir in der gewöhnlichen Potentialtheorie eine Function H mit *zwei* Unstetigkeitspunkten einführen mussten; es liegt nämlich bei dem logarithmischen Potential auf geschlossenen Flächen immer der Fall vor, dass *eine* ausgezeichnete Lösung: $V =$ Const. existirt.

Wie wir schon am Schlusse des III. Theiles bemerkten, werden an Stelle der unendlich vieldeutigen Functionen mit Periodicitätsmoduln, welche in der Potentialtheorie eine so wichtige Rolle spielen, bei unserer Differentialgleichung offenbar solche treten, welche sich bei einem vollen Umgange um eine *ausgezeichnete* Lösung vermehren. Untersuchungen über diese Frage sind noch nicht vorhanden, wie überhaupt die Integration der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ für geschlossene Mannigfaltigkeiten noch kaum bearbeitet ist. Es würde sich ohne Zweifel in dieser Richtung der Forschung noch ein weites und aussichtsreiches Feld bieten.

